

Univerzitet u Beogradu

Elektrotehnički fakultet

Milan M. Kostić

**Efikasno elektromagnetsko modelovanje
zasnovano na ortogonalizaciji funkcija bazisa
i jednačina metode momenata**

doktorska disertacija

Beograd, 2014

University of Belgrade

School of Electrical Engineering

Milan M. Kostić

**Efficient electromagnetic modeling
based on basis function orthogonalization
and orthogonalization of
method of moments equations**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2014

Mentor:

dr Branko Kolundžija, redovni profesor

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

Članovi komisije:

dr Branko Kolundžija, redovni profesor

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

dr Dragan Olćan, vanredni profesor

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

dr Bratislav Milovanović, redovni profesor

Univerzitet Singidunum

dr Milan Ilić, redovni profesor

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

dr Miodrag Tasić, docent

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane: __.0_.2015. god.

Efikasno elektromagnetsko modelovanje zasnovano na ortogonalizaciji funkcija bazisa i jednačina metode momenata

Rezime

Rad brojnih uređaja i sistema koji čine sastavni deo savremenog života se zasniva na elektromagnetskim fenomenima koji su predmet izučavanja teorije elektromagnetskog polja. Ova teorija opisuje interakcije između naelektrisanja i struja Maksvelovim jednačinama čija su analitička rešenja u zatvorenoj formi poznata samo za veoma ograničen broj posebnih slučajeva. U ostalim slučajevima za rešenje ovih jednačina se koriste razne aproksimativne metode. Razvoj i primena savremenih računara su fundamentalno promenili pristup rešavanju Maksvelovih jednačina i među aproksimativnim metodama u prvi plan stavili numeričke metode. Numerička elektromagnetika ima za cilj određivanje raspodele kako izvora elektromagnetskog polja, tako i samog elektromagnetskog polja u određenom delu prostora. Među metodama numeričke elektromagnetike, za analizu tzv. otvorenih problema u frekvencijskom domenu, ističe se metoda momenata (MoM) sa Galerkinovim testiranjem primenjena na površinske integralne jednačine.

Povećanje složenosti i veličine problema, koji se mogu rešiti zadatim računarskim resursima zahteva korišćenje različitih naprednih tehnika. U ovom radu je fokus na kombinovanju funkcija bazisa višeg reda na više nivoa, sa ciljem minimizacije kondicionog broja MoM matrične jednačine i minimizacije broja iteracija potrebnih da se ova matrična jednačina reši iterativnim postupcima. U skladu sa tim su u ovom radu sa jedne strane razmatrane efikasne metode za maksimalnu ortogonalizaciju funkcija bazisa višeg reda i, sa druge strane metode za efikasnu ortogonalizaciju vrsta i kolona matrične jednačine.

Pokazalo se da je za uspešnost ovih dveju tehnika ortogonalizacije potrebno iste kombinovati sa matricnom ekvibracijom, koja služi za ujednačavanje veličina izvora i polja u površinskim integralnim jednačinama, kao i težina funkcija bazisa / test funkcija u primeni metode momenata. Predložen je nov način matricne ekvibracije (prošireno dijagonalno skaliranje) koji se bazira na kombinaciji dva tipa ekvibracije zasnovanih na normama dijagonalnih elemenata matrice i normama njenih vrsta/kolona.

Iako su maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa bile poznate i pre ovoga rada, zbog komplikovanog načina njihovog zadavanja i još komplikovanije primene, one nisu našle široku primenu. U ovoj disertaciji je razvijen jedan nov, i pritom izuzetno jednostavan, postupak generisanja maksimalno ortogonalizovanih (max-ortho) funkcija bazisa, koji se bazira na dvostepenoj primeni Gram-Šmitove ortogonalizacije. Korišćenjem ovog postupka izvedeni su, tabelirani i nacrtani izrazi za max-ortho funkcije bazisa zaključno sa osmim redom. Dodatna pažnja je posvećena konverziji razvoja izraženih preko maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa u razvoje izražene preko modifikovanih funkcija bazisa, čime se između ostalog omogućava korišćenje već postojećih algoritama za post-procesiranje.

U disertaciji je razvijen jedan potpuno nov postupak prekondicioniranja MoM matrice formirane Galerkinovim testiranjem. Ovaj novi postupak prekondicioniranja se zasniva na istovremenom povećanju ortogonalnosti jednačina metode momenata i smanjenju norme-2 vrsta/kolona. Novi postupak je ograničen na simetrične matrice, kakve se dobijaju kombinacijom površinskih integralnih jednačina poznatih kao EFIE i PMCHWT. U sklopu predstavljenog novog postupka prekondicioniranja razmatrano je nekoliko varijanti izračunavanja težinskih koeficijenata linearnog kombinovanja. Najefikasnijom, u smislu kompromisa između broja potrebnih računskih operacija i efekata na smanjenje kondicionog broja, se pokazala varijanta zasnovana na ortogonalizaciji posmatrane vrste/kolone sa drugim vrstama/kolonama.

U disertaciji je dat niz numeričkih rezultata koji pokazuje da se kondicioni broj MoM matricne jednačine, kao i broj iteracija potrebnih za njeno rešenje, može

zmanjiti i za nekoliko redova veličine korišćenjem pojedinih metoda ili njihovih kombinacija. Na taj način je pokazano da se korišćenjem predloženih metoda, ne samo znatno ubrzava elektromagnetsko modelovanje, već i omogućava rešavanje znatno komplikovanijih i električki većih problema nego do sada.

Ključne reči: *elektromagnetsko modelovanje, funkcije bazisa višeg reda, iterativne metode, metode za prekondicioniranje, ortogonalizacija*

Naučna oblast: Elektrotehnika i računarstvo

Uža naučna oblast: Elektromagnetika

UDK broj: 621.3

Efficient electromagnetic modeling based on basis function orthogonalization and orthogonalization of method of moments equations

Abstract

Various modern day devices and systems are based on electromagnetic phenomena which are the subject of study of electromagnetic field theory. This theory describes interactions between charges and the currents using *Maxwell's* equations, which have known analytical solutions in closed form only for a very limited number of special cases. In other cases, various approximation methods are used to solve these equations. The development and widespread application of contemporary computers have fundamentally changed the ways *Maxwell's* equations are solved and have primarily emphasized numerical methods among the various approximation methods. Computational electromagnetics aim to determine the distribution of both the electromagnetic field sources, and the electromagnetic fields themselves in designated spatial regions. Among the various computational electromagnetics methods used for analysis of so called open region problems in the frequency domain, especially pronounced is the Method of Moments (MoM) applied to surface integral equations employing the *Galerkin* test procedure.

The objectives of increasing complexity and electrical size of structures that can be modeled using available computing resources require the use of various advanced techniques. In this dissertation we focus on diverse linear combinations of higher order basis functions, with the primary objective of reducing the condition number of the corresponding matrix equation and minimizing the number of iterations required to solve the matrix equation using an iterative method. Accordingly, this dissertation considered, on the one hand, effective methods for obtaining maximally orthogonalized higher order basis functions, and,

on the other hand, methods for efficient row and column orthogonalization of the matrix equation.

It was determined that, for these two orthogonalization techniques to perform effectively, they need to be used in conjunction with matrix equilibration, which is used to balance source and field quantities in surface integral equations, as well as to scale basis/test functions when applying the Method of Moments. A new method of matrix equilibration (extended diagonal scaling) is proposed, utilizing a combination of two types of equilibration based on the norms of diagonal elements of the system matrix and its row/column 2-norms.

Although maximally orthogonalized basis functions were introduced prior to this dissertation, due to their complicated derivation and an even more complicated mode of use, they have not received widespread application. In this dissertation a novel, yet quite simple, method of generating maximally orthogonalized (max-ortho) basis functions is developed, based on a two-stage implementation of the *Gram-Schmidt* orthogonalization. Using this procedure expressions for max-ortho basis functions up to the eighth order were derived, tabulated and plotted. Special attention was paid to converting approximations expressed in terms of maximally orthogonalized basis function to approximations expressed in terms of modified basis function, which also enables the use of existing post-processing algorithms.

This dissertation presents a completely new method for preconditioning a MoM matrix obtained by the *Galerkin* test procedure. The new preconditioning method is based on simultaneous increase of orthogonality of the MoM equations and a reduction of the row/column 2-norms. The new procedure is limited to symmetric systems, such as those obtained by using a combination of surface integral equations known as EFIE and PMCHWT. Several approaches to generating the weighting coefficients for the linear combination process were considered for the new preconditioning method. The most efficient method, in terms of providing a reduction of the condition number while using the least number of computations, was shown to be the method based on orthogonalization of the active row/column using other rows/columns.

The dissertation presents a series of numerical results showing that the condition number of the MoM matrix equation, as well as the number of iterations required for it to be solved, can be reduced by several orders of magnitude by using either individual methods presented here, or a combination thereof. In this manner, it is demonstrated that by employing the methods proposed, not only can electromagnetic modeling be substantially accelerated, but also a greater range of more complicated and electrically larger problems can be simulated.

Keywords: *electromagnetic modeling, higher order basis functions, iterative methods, preconditioning methods, orthogonalization*

Scientific area: Electrical and Computer Engineering

Scientific subarea: Electromagnetics

UDC number: 621.3

Sadržaj

1. Uvod.....	1
1.1. Predmet i značaj istraživanja.....	1
1.2. Pregled relevantnih radova u otvorenoj literaturi	5
1.3. Ciljevi disertacije.....	8
1.4. Polazne hipoteze	9
1.5. Očekivani naučni doprinos	10
1.6. Pregled sadržaja disertacije po glavama.....	11
2. Elektromagnetsko modelovanje zasnovano na površinskim integralnim jednačinama i funkcijama bazisa višeg reda	14
2.1. Integralna jednačina električnog polja	14
2.2. Integralna jednačina PMCHWT.....	16
2.3. Opšti oblik sistema površinskih integralnih jednačina.....	19
2.4. Osnovni elementi metode momenata	23
2.5. MoM rešenje sistema površinskih integralnih jednačina	26
2.6. Primena Galerkinove metode na rešavanje integralnih jednačina	27
2.7. Funkcije bazisa višeg reda	29
2.8. Rezime.....	33
3. Iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina.....	35
3.1. Linearne iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina.....	35
3.2. Stacionarne linearne iterativne metode	37
3.2.1. Jakobijeva metoda	38
3.2.2. Gaus-Zajdelova metoda	38
3.2.3. SOR metoda	39
3.2.4. Konvergencija stacionarnih linearnih iterativnih metoda prvog reda	40
3.2.5. Veza sa stacionarnom Ričardsonovom metodom	41
3.3. Nestacionarne linearne iterativne metode	41
3.3.1. Gradijentne metode	42
3.3.1.1. Metoda najbržeg spusta	42
3.3.1.2. Metoda konjugovanih gradijenata (Conjugate Gradient - CG)	43

3.3.2.	Metode Krilovljevih potprostora.....	44
3.3.2.1.	GMRES.....	46
3.3.2.1.1.	Arnoldijeva metoda.....	46
3.3.2.1.2.	Osnovni elementi GMRES-a.....	47
3.3.2.1.3.	Konvergencija GMRES-a.....	48
3.4.	Izbor optimalnog iterativnog postupka za rešavanje sistema datog MoM matricom dobijenom na osnovu SIE.....	48
3.5.	Kriterijum za okončanje iterativnog postupka i uslovljenost matrice sistema linearnih jednačina	49
3.6.	Numerički primer: Kondicioni broj i broj iteracija modela triedarnog ugaonog reflektora	51
3.7.	Rezime.....	53
4.	Standardni postupci za prekondicioniranje sistema linearnih jednačina ..	55
4.1.	Opšta teorija prekondicioniranja sistema linearnih jednačina.....	55
4.2.	Prekondicioniranje na bazi nepotpune LU faktorizacije.....	57
4.3.	Prekondicioniranje zasnovano na aproksimaciji inverzne matrice.....	60
4.4.	Metode zasnovane na dekompoziciji domena.....	61
4.4.1.	Prekondicioniranje bazirano na aditivnom Švarzovom postupku.....	62
4.4.2.	Prekondicioniranje zasnovano na interakcijama između bliskih elemenata (Near-Field Preconditioner - NFP).....	63
4.5.	Numerički primer: Kondicioni broj i broj iteracija za različite stepene popunjenosti matrice prekondicioniranja	64
4.6.	Rezime.....	69
5.	Opšti postupak prekondicioniranja baziran na linearnom kombinovanju funkcija bazisa i test funkcija	70
5.1.	Matrični ekvivalent linearnog kombinovanja funkcija bazisa	70
5.2.	Matrični ekvivalent linearnog kombinovanja test funkcija.....	72
5.3.	Prekondicioniranje bazirano na linearnom kombinovanju funkcija bazisa i test funkcija.....	74
5.4.	Rezime.....	75
6.	Matrična ekvibracija.....	76

6.1.	Matrična ekvibracija kao oblik prekondicioniranja	77
6.2.	Matrična ekvibracija kao metoda ujednačavanja izvora i jednačina pri formiranju sistema površinskih integralnih jednačina.....	78
6.3.	Matrična ekvibracija i optimalno ponderisanje funkcija bazisa i test funkcija ...	79
6.4.	Matrična ekvibracija zasnovana isključivo na amplitudama MoM matričnih elemenata.....	81
6.5.	Numerički primer: Kondicioni broj i broj iteracija modela triedarnog ugaonog reflektora uz primenu dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja.....	84
6.6.	Rezime.....	86
7.	Maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa.....	87
7.1.	Tipovi funkcija bazisa višeg reda	87
7.2.	Ortogonalnost funkcija bazisa.....	88
7.3.	Razvoj maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa Gram-Šmitovim postupkom u dve faze.....	90
7.4.	Osnovni oblik Q -funkcija i faktori skaliranja.....	96
7.5.	Ortogonalnost klasičnih, skoro-ortogonalnih i maksimalno ortogonalizovanih S -funkcija.....	100
7.6.	Post-procesiranje rezultata dobijenih primenom maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa preko algoritama za druge tipove funkcija bazisa višeg reda.....	102
7.7.	Numerički primeri.....	104
7.7.1.	Triedarni ugaoni reflektor	105
7.7.2.	Spiralni log-periodični niz dielektričnih kocki	109
7.7.3.	Spiralni log-periodični niz metalnih kocki	112
7.7.4.	Polu-talasni dipol postavljen ispod trupa helikoptera.....	114
7.7.5.	Modeli lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnom monopol antenom.....	117
7.8.	Rezime.....	122
8.	Jedan nov postupak prekondicioniranja baziran na linearnom kombinovanju vrsta i kolona matrice metode momenata	123
8.1.	Polazna razmatranja	123
8.1.1.	Geršgorinova teorema o lokalizaciji sopstvenih vrednosti matrice	125

8.1.2.	Kondicioni broj – veza sa sopstvenim i singularnim vrednostima matrice	125
8.1.3.	Osnovni elementi postupka prekondicioniranja zasnovanog na linearnom kombinovanju vrsta i kolona matrice metode momenata	126
8.2.	Kriterijumi za optimalno linearno kombinovanje vrsta i kolona	127
8.3.	Metode nalaženja težinskih koeficijenata linearnog kombinovanja vrsta i kolona	131
8.3.1.	Ortogonalizacija posmatrane vrste sa L drugih vrsta	131
8.3.1.	Minimizacija kvadrata nepotpune norme-2 vrste pri kombinovanju sa L drugih vrsta uz redukciju kombinatornog prostora.....	132
8.4.	Optimalan izbor vrsta/kolona za linearno kombinovanje	134
8.5.	Optimalna strategija linearnog kombinovanja.....	135
8.6.	Numerički primeri.....	136
8.6.1.	Spektar matrice za različite taktike linearnog kombinovanja vrsta/kolona za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom	136
8.6.2.	Izbor parametara i poređenje različitih metoda određivanja težinskih koeficijenata linearnog kombinovanja vrsta/kolona na modelima lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnom monopol antenom	140
8.6.3.	Broj skalarnih proizvoda i uspešnost linearnog kombinovanja vrsta/kolona za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom	160
8.6.4.	Linearno kombinovanje sa do $L = 9$ vrsta/kolona na modelima lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnom monopol antenom	161
8.7.	Rezime.....	166
9.	Zaključci	167
	Literatura	171
	Prilozi	180
	Prilog A. Norme vektora i matrica	180
	Prilog B. Ležandrovi polinomi.....	182
	Prilog C. Maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa u slučaju heksaedarnih elemenata.....	184
	Biografija autora.....	186

1. Uvod

Uređaji i sistemi, poput mobilne telefonije, satelitskih komunikacionih sistema, radarskih sistema, električnih motora i generatora, televizije, radija i brojnih drugih čine sastavni deo savremenog života. Rad svih ovih uređaja se zasniva na elektromagnetskim fenomenima koji su predmet izučavanja teorije elektromagnetskog polja. Teorija elektromagnetskog polja, ili kraće, elektromagnetika, opisuje interakcije između naelektrisanja i struja Maksvelovim jednačinama - sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina koje predstavljaju klasičnu aproksimaciju generalnije teorije kvantne elektrodinamike. Analitička rešenja ovih jednačina u zatvorenoj formi su poznata samo za veoma ograničen broj posebnih slučajeva koji su retko kada i direktno primenjivi. U ostalim slučajevima za rešenje ovih jednačina se moraju koristiti razne aproksimativne metode.

Razvoj i primena računara su fundamentalno promenili pristup rešavanju Maksvelovih jednačina i među aproksimativnim metodama u prvi plan stavili numeričke metode. Naime, takve metode se mogu primeniti na velike klase srodnih problema bez ikakvih izmena algoritama ili programa. Numeričke metode koje se primenjuju na rešavanje Maksvelovih i iz njih izvedenih jednačina su predmet izučavanja numeričke elektromagnetike (Computational Electromagnetics - CEM).

1.1. Predmet i značaj istraživanja

Cilj metoda numeričke elektromagnetike je određivanje raspodele kako izvora elektromagnetskog polja, tako i elektromagnetskog polja u neposrednoj blizini razmatrane strukture, ili na određenom rastojanju od iste. Određivanje pomenutih raspodela se takođe naziva i elektromagnetskim modelovanjem. Automatizacija proračuna vezanih za elektromagnetsko modelovanje omogućava složene analize uticaja određenih parametara strukture, kao i nov pristup projektovanju - projektovanje uz pomoć optimizacije. Time se omogućava brže i jednostavnije projektovanje, uz smanjenje potrebe za skupim prototipovima.

Performanse CEM alata se konstantno poboljšavaju, što je sa jedne strane uslovljeno stalnim porastom performansi računara već nekoliko decenija unazad, a sa druge poboljšanjem postojećih i kreiranjem novih algoritama. Tako se stalno pomeraju dometi u smislu kompleksnosti i električne veličine modela koji se mogu uspešno rešiti, kao i frekvencijskog opsega ili vremenskog intervala za koje se može proračunati odziv, odnosno efikasnosti optimizacije.

Za elektromagnetsko modelovanje jedne strukture se po pravilu mogu koristiti različite metode. Ukoliko se svi delovi strukture sastoje od linearnih materijala, analiza se jednostavnije može obaviti u frekvencijskom domenu. Međutim, ukoliko je bar jedan deo strukture nelinearan, analiza se mora obaviti u vremenskom domenu.

Najpoznatije metode koji se zasnivaju na rešavanju Maksvelovih jednačina u frekvencijskom domenu su metoda momenata (Method of Moments - MoM), primenjena na integralne jednačine [1]-[4] i metoda konačnih elemenata (Finite Element Method - FEM), primenjena na diferencijalne jednačine [5,6]. U vremenskom domenu to su metoda konačnih razlika u vremenskom domenu (Finite-Difference Time-Domain - FDTD) [7]-[9], tehnika konačne integracije (Finite Integration Technique - FIT) [10], kao i Transmission-Line Matrix (TLM) metoda [11].

U oblasti antena, rasejača i pasivnih mikrotalasnih kola posebno su interesantni linearni problemi u kojima elektromagnetsko polje nije ograničeno, odnosno gde granice domena u kome se određuje elektromagnetsko polje nisu ograničene. Kod antena je od interesa, pored bliskog, i tzv. daleko polje, gde elektromagnetsko polje nije lokalizovano u nekom ograničenom delu prostora. Ovakvi problemi se nazivaju otvorenim problemima. Da bi se otvoreni problemi mogli rešiti korišćenjem metoda FEM, FDTD, FIT i TLM, prostor se mora ograničiti na neki veštački način, npr. uvođenjem tzv. radijacionog graničnog uslova u zoni dalekog polja, ili apsorpcionog uslova na granici zone bliskog polja. Stoga se u slučaju rešavanja otvorenih problema prednost daje MoM-u, koji ne zahteva uvođenje veštačkih graničnih uslova.

Ukoliko se MoM primenjuje na površinske integralne jednačine (Surface Integral Equations - SIEs) tada se govori o MoM/SIE, a ukoliko se primenjuje na zapreminske integralne jednačine (Volume Integral Equations - VIEs), govori se o MoM/VIE [4, 2]. U slučaju MoM/SIE nepoznate veličine su raspodeljene po graničnim površima materijalnih domena, gde se pod materijalnim domenom podrazumeva prostor ispunjen homogenom, linearnom i izotropnom sredinom. U slučaju MoM/VIE i ostalih metoda (FEM, FDTD, FIT i TLM) nepoznate veličine su raspodeljene po zapremini tih domena, tako da je za isti elektromagnetski problem broj nepoznatih veličina koje treba odrediti u slučaju MoM/SIE daleko manji nego u slučaju MoM/VIE i ostalih metoda. U skladu sa tim će u ovom radu fokus biti na korišćenju MoM/SIE za elektromagnetsko modelovanje u frekvencijskom domenu.

Metoda momenata je opšta metoda rešavanja linearnih operatorskih jednačina. Kod metode momenata se nepoznata veličine (na primer gustina struje na graničnim površima domena) aproksimira sumom poznatih N funkcija (funkcija bazisa) pomnoženih nepoznatim koeficijentima. Ova aproksimacija se zamenjuje u linearnu operatorsku jednačinu (na primer SIE), leva i desna strana tako dobijene operatorske jednačine se množe odgovarajućom funkcijom (test funkcijom) i integrale po domenu test funkcije. Na ovaj način se linearna operatorska jednačina transformiše u linearnu algebarsku jednačinu. Ponavljanjem ove procedure testiranja skupom nezavisnih test funkcija kojih ima onoliko koliko i funkcija bazisa dobija se sistem linearnih jednačina reda N (matrična jednačina), čijim se rešavanjem određuju nepoznati koeficijenti, a time i aproksimativno rešenje polazne operatorske jednačine.

Kako se kod MoM-a radi o gustim matricama, vreme rešavanja matrične jednačine je srazmerno N^3 za direktne i MN^2 za iterativne metode rešavanja, gde je M broj iteracija. Tako je, na primer, za direkno rešavanje sistema sa dva puta više nepoznatih trajanje rešavanja sistema osam puta duže. Pokazuje se da je na savremenim personalnim računarima čiji procesor ima četiri jezgra za direktno rešenje sistema od 100 000 kompleksnih linearnih jednačina potrebno pola dana. To znači da je za sisteme od 200 000 jednačina potrebno četiri dana. Očigledno je

da se problemi koji zahtevaju mnogo više od 100 000 nepoznatih koeficijenata praktično ne mogu rešavati na personalnim računarima.

Generalno, mogu se identifikovati tri pristupa koji omogućavaju povećanje složenosti i veličine problema koji se mogu rešiti:

- **efikasno korišćenje performansi savremenih računara;** povećanje performansi savremenih računara se zasniva na što većoj paralelizaciji, bilo povećanjem broja *core*-ova pojedinačnog procesora, korišćenjem *Hyper Threading*-a, *cluster*-a [12]-[14], sve do korišćenja grafičkih procesora (Graphics Processing Unit - GPU) [15]-[20]; ograničenja za direktno rešavanje sistema jednačina uslovljena dostupnom količinom operativne memorije (RAM) se prevazilaze korišćenjem tzv. *out-of-core* algoritama [21]-[24], koji matricu u delovima čuvaju na jednom ili više hard diskova, a u RAM-u drže samo trenutno potrebne delove.

- **smanjenje broja nepoznatih koeficijenata, N , potrebnih za aproksimativno rešenje;** jedan način da se umanja broj funkcija bazisa je da se umesto standardnih funkcija bazisa najnižeg reda [25]-[29] koriste funkcije bazisa višeg reda (Higher Order Basis Functions - HOBFs) [3], [4], [30]-[41]; drugi način da se umanja broj funkcija bazisa je da se funkcije bazisa najnižeg reda grupišu u tzv. makro funkcije bazisa (Macro Basis Functions) [42]-[44].

- **smanjenje memorijskih resursa i broja operacija potrebnih za čuvanje i rešavanje MoM sistema linearnih jednačina;** u ove metode spadaju iterativne metode [45]-[47] i na njima bazirane metode poput FMM (Fast Multipole Method) [48], MLFMA (Multi-Level Fast Multipole Algorithm) [49, 50]; u ove metode spadaju i razne druge metode koje se baziraju na kompresiji matrice sistema, kao što je na primer ACA (Adaptive Cross Approximation) algoritam [51]-[53].

Može se pretpostaviti da se najbolji rezultati u pogledu povećanja složenosti i veličine problema rešivih zadatim računarskim resursima mogu dobiti kombinovanjem više gore pomenutih pristupa. U ovom radu je fokus na kombinovanju funkcija bazisa višeg reda i iterativnih postupaka.

1.2. Pregled relevantnih radova u otvorenoj literaturi

Funkcije bazisa višeg reda se mogu podeliti na hijerarhijske funkcije bazisa i interpolacione funkcije bazisa.

Ukoliko i -ta funkcija bazisa ne zavisi od reda aproksimacije koji se usvaja, govori se o hijerarhijskim funkcijama bazisa. Tada se povećanjem reda aproksimacije samo dodaju nove funkcije bazisa (višeg reda) postojećim, koje ostaju nepromenjene. Jednostavne hijerarhijske funkcije bazisa višeg reda mogu se konstruisati kao linearne kombinacije dve stepene funkcije [3], [4], [30]-[38].

Interpolacione funkcije bazisa zasnovane na Lagranžovim interpolacionim polinomima [39]-[41] imaju jediničnu vrednost u određenom čvoru površinskog elementa, dok je u svim ostalim čvorovima površinskog elementa njihova vrednost jednaka nuli.

Hijerarhijske funkcije bazisa višeg reda i interpolacione funkcije bazisa višeg reda su se pokazale veoma efikasnim kada se matična jednačina sistema rešava direktnim metodama. Tako, na primer, za efikasno modelovanje električki velikih problema broj nepoznatih po λ^2 površine se kreće oko 300 za slučaj Rao, Wilton i Glisson (RWG) funkcija bazisa [26], oko 200 za slučaj rooftop funkcija bazisa [25], od 40 do 70 za funkcije bazisa višeg reda kod trougaonih elemenata [54], odnosno oko 30 za slučaj polinomske funkcije višeg reda kod četvorougaoih elemenata [31].

Razlog za korišćenje iterativnih metoda leži u njihovoj mogućnosti da se do zadovoljavajućeg rešenja dođe korišćenjem mnogo manjeg broja operacija nego što je to slučaj sa direktnim metodama. Međutim, da li će ta mogućnost biti iskorišćena zavisi od više faktora. Na jednoj strani efikasnost iterativnih metoda leži u izboru formulacije problema, odnosno tipa integralnih jednačina koje se rešavaju, procedura za njihovo testiranje i funkcija bazisa. Tako se, na primer, pokazuje da u slučaju zatvorenih metalnih objekata Combined Field Integral Equation (CFIE) formulacija omogućava značajno bržu konvergenciju nego integralna jednačina električnog polja (Electric Field Integral Equation - EFIE) [55]. Kada su u modelu prisutne električki veoma male strukture, što se uvek javlja na dovoljno niskim

učestanostima, dolazi do pojave nestabilnosti rešenja (tzv. *Low-Frequency Breakdown problem*). Pored izbora adekvatnih integralnih jednačina, za rešavanje ovog problema se najčešće funkcije bazisa preuređuju u loop-tree i loop-star konfiguracije [56]-[58].

Na drugoj strani efikasnost iterativnog rešenja zavisi od izbora iterativne metode i pripreme matrične jednačine za iterativno rešavanje. Tokom 80-ih i 90-ih godina najčešće korišćene iterativne metode za rešavanje matričnih jednačina dobijenih primenom MoM-a na SIE predstavljaju neku od varijanti metode konjugovanih gradijenata (Conjugate Gradient - CG) [59]-[62]. U zadnje dve dekade sem CG metoda često se koriste i metode bazirane na Krilovljevim potprostorima [63]. Među ovim metodama se posebno ističe generalizovana metoda minimalnog ostatka (Generalized Minimum Residuum - GMRES) [64], [45], [63].

Brzina konvergencije matrične jednačine se može razmatrati preko raspodele sopstvenih (karakterističnih) vrednosti iteracione matrice i broja sopstvenih vektora iteracione matrice potrebnih za predstavljanje kolone slobodnih članova [65], ali se najčešće kao mera brzine konvergencije uzima takozvani kondicioni broj matrice. Kondicioni broj matrice predstavlja odnos najveće i najmanje singularne vrednosti matrice i daje granicu kolika će biti relativna greška rešenja sistema u odnosu na relativnu grešku kolone slobodnih članova. Smanjenjem kondicionog broja matrice generalno se smanjuje i broj iteracija iterativnog postupka potreban za datu tačnost.

U najvećem broju slučajeva posle primene MoM-a na SIE matrica sistema ima relativno visok kondicioni broj. Takav sistem se ne može efikasno rešiti iterativnim postupcima, već se isti mora transformisati u pogodniji oblik. Transformacija koja se pritom primenjuje se naziva prekondicionerom [45], [48], [63]. Ovakva transformacija se najčešće može predstaviti množenjem matrice sistema nekom drugom matricom, koja se zove matrica prekondicioniranja. Najjednostavnija matrica prekondicioniranja je dijagonalna matrica, koja se obično konstruiše tako da se dijagonalni elementi rezultantne matrice izjednače sa jedinicom. Nešto složenija je tzv. blok-dijagonalna matrica prekondicioniranja, koja se dobija

invertovanjem blokova matrice sistema u okolini glavne dijagonale [66]-[68]. Konstrukcija matrica prekondicioniranja se u većini implementacija za funkcije bazisa nižeg reda zasniva na invertovanju dela matrice koji karakteriše interakcije bliskih suseda [69] i može se izračunati na više načina.

Koncept bliskih suseda je osnova i nepotpune LU dekompozicije (Incomplete LU - ILU) gde se prilikom konstrukcije matrice prekondicioniranja usvaja određeni obrazac proređivanja i na osnovu njega računa nepotpuna LU dekompozicija takve matrice [45]. U slučaju FMM metode nepotpuna LU dekompozicija se primenjuje samo na elemente koji odgovaraju prostorno bliskim funkcijama bazisa [70]-[72]. Matrični elementi koji odgovaraju prostorno bliskim funkcijama bazisa se često koriste i kao osnova složenih algebarskih postupaka prekondicioniranja [73]. Isti princip je primenjiv i pri konstrukciji SPAI matrica prekondicioniranja [74]-[77] koja zahteva rešavanje velikog broja problema najmanjih kvadrata, ali je robusnija u odnosu na ILU prekondicioniranje i može se znatno jednostavnije paralelizovati.

Neki od pristupa prekondicioniranja se zasnivaju na iterativnoj dekompoziciji domena [45], poput aditivnog Švarcovog prekondicioniranja, gde se celokupan domen problema deli na određen broj poddomena i lokalno rešenje svakog od njih koristi pri nalaženju kompletnog rešenja. Složenije realizacije uključuju više različitih tipova iterativnih postupaka u multi-grid šemi [73, 78].

Korišćenjem Kalderonovih jednakosti i posebnog tipa funkcija bazisa može se konstruisati Kalderonov prekondicioner [79]-[83], naročito efikasan pri niskim učestanostima.

Gore pomenuti iterativni postupci i prekondicioneri su pokazali veoma dobre rezultate u slučaju funkcija bazisa nižeg reda. Međutim, primena istih kod jednostavnih hijerarhijskih funkcija bazisa višeg reda se pokazala veoma ograničenom, naročito za više redove polinomske aproksimacije [84]. Razlog tome je što ovakve funkcije bazisa rezultuju matricom veoma visokog kondicionog broja. Da se kondicioni broj FEM matrice dobijene korišćenjem funkcija bazisa višeg reda može značajno smanjiti njihovom ortogonalizacijom, prvi je pokazao *Webb* polazeći od hijerarhijskih funkcija bazisa višeg reda za trougaone i tetraedarske elemente [85]. Zatim je pokazano da se kondicioni broj MoM matrice u slučaju

čtetvorougaonih elemenata može smanjiti uvođenjem ultrasferičnih (Gegenbauerovih) ili Čebiševljevih polinoma umesto stepenih funkcija [86], čime se povećava ortogonalnost jednostavnih hijerarhijskih funkcija bazisa. Ortogonalnost ovih funkcija bazisa je dodatno povećana uvođenjem Ležandrovih funkcija bazisa umesto stepenih funkcija [87, 88]. Ovakve funkcije bazisa se nazivaju skoro-ortogonalnim (near-ortho) funkcijama bazisa višeg reda.

Svi ovi radovi ukazivali su da veća ortogonalizacija funkcija bazisa vodi ka većem smanjenju kondicionog broja FEM/MoM matrice i broja iteracija potrebnog za njihovo rešavanje. Takva prepostavka je potvrđena razvojem tzv. maksimalno ortogonalizovanih (max-ortho) funkcija bazisa višeg reda [89], tj. funkcija bazisa koje se ne mogu dodatno ortogonalizovati. Predstavljena metodologija određivanja koeficijenata u razvoju takvih funkcija bazisa je relativno složena i svodi se na rešavanje sistema jednačina za svaki red razvoja.

Iako su maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa pokazale manje kondicione brojeve MoM matrice i manji broj iteracija za njeno rešavanje od ostalih delimično ortogonalizovanih funkcija bazisa, one nisu naišle na širu primenu. Može se pretpostaviti da je to zbog komplikovanog načina njihovog određivanja. Tako, na primer, radovi [90, 91] koji su se pojavili posle rada [89] koriste daleko jednostavnije metode koje vode manjem nivou ortogonalizacije. U radu [90] se polazi od interpolacionih funkcija bazisa višeg reda za trougaone i tetraedarske elemente i interpolacioni polinomi zamenjuju ortogonalnim polinomima. Na isti način se dobijaju funkcije bazisa u radu [91], samo za četvorougaone i heksaedarne elemente. Takođe se pokazuje da se adekvatnim izborom multiplikativnih konstanti pri skaliranju funkcija bazisa višeg reda može dodatno poboljšati kondicioni broj matrice sistema [92, 90].

1.3. Ciljevi disertacije

Kao što je u prethodnom poglavlju uočeno, kondicioni broj matrice sistema u slučaju funkcija bazisa višeg reda se može dramatično smanjiti međusobnom ortogonalizacijom funkcija bazisa koje imaju zajedničku oblast definisanosti. Ovakva ortogonalizacija se može interpretirati i kao primena odgovarajućeg

simetričnog prekondicionera na originalni sistem jednačina, za razliku od standardnih prekondicionera koji su po svojoj prirodi nesimetrični i levo-strani. Odavde se može pretpostaviti da bi se dalje smanjenje kondicionog broja moglo postići ortogonalizacijom vrsta i kolona same matrične jednačine na način koji odgovara formiranju simetričnog prekondicionera. Imajući ovo u vidu definisani su glavni ciljevi ovog rada:

1. razvoj efikasnih metoda za maksimalnu ortogonalizaciju funkcija bazisa višeg reda, i
2. razvoj metoda za efikasnu ortogonalizaciju vrsta i kolona matrične jednačine, a u zajedničkom cilju minimizacije kondicionog broja matrice sistema matrične jednačine dobijene primenom metode momenata na površinske integralne jednačine i minimizacije broja iteracija potrebnih da se ova matrična jednačina reši iterativnim postupcima.

Time bi se ne samo omogućilo efikasnije i pouzdanije elektromagnetsko modelovanje u frekvencijskom domenu korišćenjem ove metode, već bi se i značajno proširila oblast problema koji se mogu rešiti ovom metodom korišćenjem datih resursa.

1.4. Polazne hipoteze

U radu se polazi od varijante MoM/SIE u kojoj se jednačine EFIE i PMCHWT testiraju Galerkinovom metodom, jer se ova varijata smatra tačnijom od ostalih varijanti MoM/SIE kad god se veličina strukture kreće od jednog hiljaditog dela talasne dužine do hiljadu talasnih dužina. To se između ostalog objašnjava činjenicom da jedino ove dve jednačine pojedinačno i u kombinaciji, a uz korišćenje Galerkinove test procedure, vode očuvanju bilansa snaga numeričkog rešenja. Sem toga, kao funkcije bazisa biće korišćene funkcije bazisa višeg reda, jer one omogućavaju dobijanje rešenja željene tačnosti korišćenjem manjeg broja nepoznatih koeficijenata nego funkcije bazisa nižeg reda.

Generalno se kondicioni broj ovako dobijene matrične jednačine može smanjiti primenom adekvatnog prekondicionera. Međutim, standardni prekondicioneri su

nesimetrični i levo-strani. Množenje matrične jednačine ovakvim prekondicionerima je ekvivalentno testiranju originalne integralne jednačine težinskim funkcijama koje predstavljaju linearnu kombinaciju funkcija bazisa, čime se narušava priroda Galerkinove test procedure. Pretpostavka je da optimalni prekondicioneri treba da budu takvi da se posle množenja matrične jednačine ne narušava priroda Galerkinove test procedure. Takvi prekondicioneri se mogu dobiti tako što će se originalne funkcije bazisa i njima jednake test funkcije istovremeno linearno kombinovati u nove funkcije bazisa i takođe njima jednake nove test funkcije. Tako dobijeni prekondicioneri bi bili simetrični dvo-strani prekondicioneri.

Ostaje pitanje kako treba kombinovati originalne funkcije bazisa da bi tako dobijeni simetrični prekondicioner rezultovao smanjenjem kondicionog broja matrice i smanjenjem broja iteracija. Pretpostavka je da se to može uraditi delimičnom/potpunom ortogonalizacijom vrsta/kolona matrične jednačine koje odgovaraju tim funkcijama bazisa. Npr. dve vrste/kolone se smatraju potpuno ortogonalizovanim ako je njihov skalarni proizvod jednak nuli. Posebno u slučaju funkcija bazisa višeg reda, koje imaju zajedničku oblast definisanosti, to se može uraditi delimičnom/potpunom ortogonalizacijom funkcija bazisa te oblasti. Npr. dve takve funkcije bazisa se smatraju potpuno ortogonalizovanim ako je njihov unutrašnji proizvod jednak nuli.

Kako se ortogonalizacija funkcija bazisa i vrsta/kolona matrične jednačine može obaviti na različite načine bilo je potrebno te načine ispitati i odrediti optimalnu strategiju ortogonalizacije, tako da se u minimalnom broju dodatnih operacija dobije što manji kondicioni broj sistemske matrice.

1.5. Očekivani naučni doprinos

Polazeći od gore navedenih hipoteza izvršen je razvoj različitih metoda za maksimalnu ortogonalizaciju funkcija bazisa višeg reda i ortogonalizaciju vrsta i kolona matrične jednačine. Efikasnost ovih postupaka u cilju smanjenja kondicionog broja matrice sistema matrične jednačine i broja iteracija neophodnih za njeno rešavanje ispitani su na većem broju primera.

Imajući u vidu uspešnost koju su ovi postupci pokazali, mogu se očekivati sledeći naučni doprinosi:

- razvoj procedure za konstrukciju maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa definisanih na zakrivljenim četvorougaoim (površinskim) elementima, koje automatski zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta struja na krajevima i spojevima elemenata, a na bazi dvostepene Gram-Šmitove procedure;
- proširenje teorije maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa na zakrivljene žičane (linijske) i heksaedarske (zapreminske) elemente;
- tabeliranje ortogonalizovanih funkcija bazisa za različite redove aproksimacije izražene preko (1) stepenih funkcija i (2) Ležandrovih polinoma;
- razvoj tehnika za optimalno skaliranje ortogonalizovanih funkcija bazisa, tj. određivanje optimalnih težinskih koeficijenata funkcija bazisa posle ortogonalizacije, a pre određivanje nepoznatih koeficijenata rešavanjem matrične jednačine;
- izvođenje relacije između maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda i drugih tipova funkcija bazisa višeg reda, sa akcentom na primenu kod već postojećih algoritama post-procesiranja;
- razvoj više srodnih tehnika za simetrično prekondicioniranje koje se baziraju na efikasnoj ortogonalizaciji vrsta i kolona originalne matrične jednačine.

1.6. Pregled sadržaja disertacije po glavama

U drugoj glavi su razmatrane površinske integralne jednačine kao veoma efikasan način elektromagnetskog modelovanja brojnih klasa metalnih i dielektričnih struktura. Predstavljena je najpre integralna jednačina električnog polja, pa onda integralna jednačina PMCHWT, i na kraju jedan opšti sistem integralnih jednačina različitog tipa. Zatim su dati osnovni elementi metode momenata, kao i opšti oblik ove metode primenjen na sistem integralnih jednačina. Poseban naglasak je dat korišćenju Galerkinove test procedure, pri čemu je pokazano da se u slučaju sistema integralnih jednačina sastavljenih od EFIE i PMCHWT adekvatnim skaliranjem može dobiti simetrična MoM matrica. Na kraju

je dat kratak prikaz modelovanja geometrije korišćenjem žičanih i površinskih elemenata, kao i prikaz jednostavnih hijerarhijskih funkcija bazisa višeg reda definisanih nad ovim elementima.

U trećoj glavi je dat pregled nekih osnovnih iterativnih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina. Prvo su ukratko opisane stacionarne linearne iterativne metode (Jakobijeva, Gaus-Zajdelova i SOR metoda), koje predstavljaju osnovu za razumevanje složenijih iterativnih metoda, ali se retko koriste za rešavanje MoM/SIE matičnih jednačina. Zatim su predstavljene nestacionarne linearne metode, prvo gradijentne metode (metoda najbržeg spusta, CG), a zatim metode zasnovane na Krilovljevim potprostorima (GMRES). U ovoj glavi je diskutovan i optimalan izbor iterativne metode za rešavanje MoM/SIE matične jednačine i od dve najčešće korišćene metode prednost data CG-u u odnosu na GMRES. Na kraju je na numeričkom primeru pokazano da se u slučaju jednostavnih hijerarhijskih funkcija bazisa višeg reda dobija MoM matrica vrlo visokog kondicionog broja za čije je rešavanje potreban jako veliki broj iteracija. Ovim primerom je pokazano da za efikasno rešenje matične jednačine nije dovoljno izabrati najbolju iterativnu metode, već se pre primene iterativnog postupka mora izvršiti priprema matične jednačine putem neke vrste prekondicioniranja.

U četvrtoj glavi su prikazani neki od pristupa koji se najčešće koriste za prekondicioniranje MoM/SIE matičnih jednačina. Pored nepotpune LU faktorizacije matrice sistema, kao najrasprostranjenije metode u numeričkoj elektromagnetici, razmatrano je i prekondicioniranje zasnovano na aproksimaciji inverzne matrice i prekondicioniranje zasnovano na dekompoziciji domena. Na kraju ove glave je na numeričkom primeru pokazano da su u slučaju jednostavnih hijerarhijskih funkcija bazisa višeg reda standarni prekondicioneri u velikoj meri neefikasni.

U petoj glavi je data opšta teorija prekondicioniranja bazirana na linearnom kombinovanju funkcija bazisa i test funkcija, odnosno vrsta i kolona matične jednačine.

U šestoj glavi je prvo predstavljena opšta teorija matične ekvibracije. Zatim je prikazano kako se matična ekvibracija može iskoristiti za ujednačavanje veličina

izvora i polja u sistemu površinskih integralnih jednačina i funkcija bazisa različitog reda definisanih na elementima različite električne veličine. Posebna pažnja je posvećena matričnim ekvilibracijama koje uključuju sva ova ujednačavanja kroz ujednačavanje dijagonalnih elemenata matrice i ujednačavanje normi vrsta i kolona matrice. Na kraju ove glave je na numeričkom primeru pokazano da se u slučaju jednostavnih hijerarhijskih funkcija bazisa višeg reda kondicioni broj MoM matrice, kao i broj iteracija za njeno rešavanje, može znatno smanjiti korišćenjem matrične ekvilibracije, ali da tako dobijeno iterativno rešenje po efikasnosti i dalje znatno zaostaje za direktnim rešenjem matrice.

U sedmoj glavi je prikazan nov postupak izvođenja max-ortho funkcija bazisa, koji se bazira na dvostepenoj primeni Gram-Šmitove ortogonalizacije. Posebno jednostavan oblik je demonstriran u slučaju kada se polazi od near-ortho funkcija bazisa. Korišćenjem ovog postupka izvedeni su, tabelirani i nacrtani izrazi za max-ortho funkcije bazisa zaključno sa osmim redom izraženi preko stepenih funkcija i preko Ležandrovih polinoma. Posebno su tabelirani težinski koeficijenti ovih funkcija bazisa, koji zadovoljavaju različite zahteve u pogledu normalizacije. Dodatna pažnja je posvećena konverziji razvoja izraženih preko max-ortho funkcija bazisa u razvoje izražene preko modifikovanih funkcija bazisa. Na kraju je dat niz numeričkih primera kojima se ilustruje dramatično smanjenje kondicionog broja i broja iteracija u slučaju korišćenja max-ortho umesto jednostavnih hijerarhijskih funkcija bazisa višeg reda.

U osmoj glavi je prikazana nova metoda prekondicioniranja simetričnih matričnih jednačina bazirana na linearnom kombinovanju vrsta i kolona matrice, koja na jednoj strani teži da što više ortogonalizuje te vrste i kolone, a na drugoj da što više smanji module nedijagonalnih elemenata. Posebna pažnja je posvećena kriterijumima za optimalan izbor vrsta i kolona koje se kombinuju, kao i težinskih koeficijenata, kojima se te vrste i kolone množe u toku kombinovanja. Na kraju je dat niz numeričkih primera kojima se ilustruje efikasnost nove metode, bez obzira da li se primenjuje na max-ortho ili na jednostavne funkcije bazisa višeg reda.

U devetoj glavi su dati zaključci uz smernice daljeg razvoja. Na kraju disertacije su, nakon spiska korišćene literature, dati prilozi.

2. Elektromagnetsko modelovanje zasnovano na površinskim integralnim jednačinama i funkcijama bazisa višeg reda

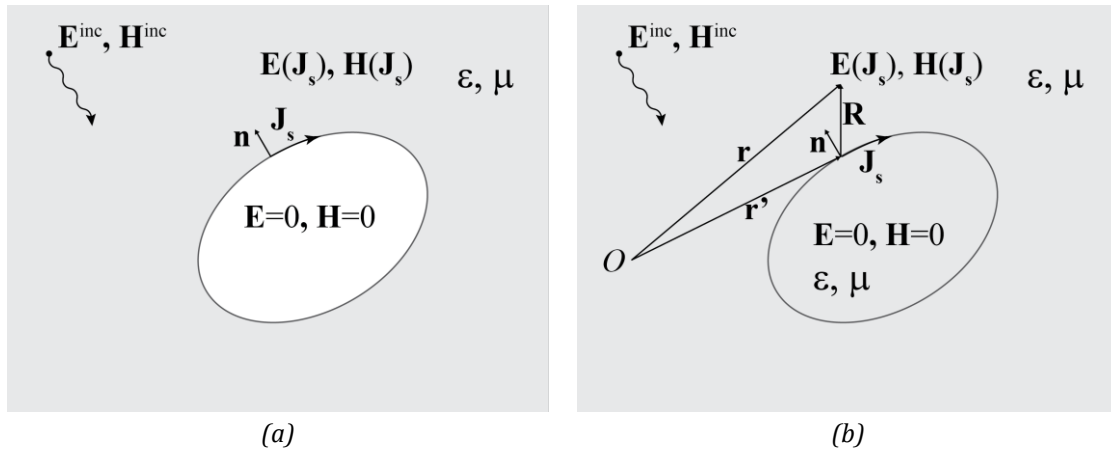
Površinske integralne jednačine predstavljaju veoma efikasan način elektromagnetskog modelovanja brojnih klasa metalnih i dielektričnih struktura [4]. U ovoj glavi će najpre biti razmatrana integralna jednačina električnog polja kao osnovni predstavnik površinskih integralnih jednačina. Zatim će biti predstavljena integralna jednačina PMCHWT i na osnovu nje metodologija formiranja sistema površinskih integralnih jednačina zasnovana na dekompoziciji složenog problema na pojedinačne regione na osnovu površinske teoreme ekvivalencije. Za rešavanje tako formiranog sistema biće dati osnovni elementi metode momenata, uz akcenat na specifičnosti primene Galerkinove metode testiranja na površinske integralne jednačine. Na kraju ove glave će biti razmatrano geometrijsko modelovanje karakteristično za predstavljene površinske integralne jednačine uz primenu funkcija bazisa višeg reda.

2.1. Integralna jednačina električnog polja

Posmatrajmo savršeno provodno telo (perfect electric conductor - PEC) u beskonačnom domenu koji je ispunjen homogenim, linearnim i izotropnim materijalom parametara ϵ i μ . Neka je telo pobuđeno prosto-periodičnim incidentnim elektromagnetskim poljem kružne učestanosti ω datim vektorom električnog polja \mathbf{E}^{inc} i vektorom magnetskog polja \mathbf{H}^{inc} (Slika 2.1a). Usled ove pobude se na površi tela indukuju struje površinske gustine, \mathbf{J}_s , takve da dolazi do poništavanja incidentnog polja u unutrašnjosti tela. Kada se odrede ove struje sve ostale veličine se mogu jednostavno izračunati. Naime, kako je ukupno polje u unutrašnjosti PEC tela jednako nuli, polje unutar i van tela se neće promeniti ukoliko se savršeno provodni materijal zameni materijalom parametara ϵ i μ okolne sredine, uz zadržavanje raspodele struja \mathbf{J}_s . U tako postavljenom

ekvivalentnom problemu struje \mathbf{J}_s se nalaze u beskonačnoj homogenoj, linearnoj i izotropnoj sredini, te se rasejano polje ovih struja $\mathbf{E}(\mathbf{J}_s)$ i $\mathbf{H}(\mathbf{J}_s)$ može izraziti u zatvorenoj formi u vidu integrala.

Na osnovu teoreme jedinstvenosti rešenja [4] rasejano polje van tela je određeno pobudom i odgovarajućim graničnim uslovom na površi tela. Na osnovu ekvivalentnog modela (Slika 2.1b) granični uslov se može izraziti preko pobude i indukovanih struja, što rezultuje odgovarajućom površinskom integralnom jednačinom (Surface Integral Equation - SIE). Površinske integralne jednačine su linearne operatorske jednačine, i kao takve se mogu rešavati opštim metodama poput metode momenata.



Slika 2.1 Svršeno provodno telo u homogenoj, linearnoj i izotropnoj sredini (a), i ekvivalentni model (b).

Integralna jednačina električnog polja (Electric Field Integral Equation - EFIE) se dobija polazeći od graničnog uslova da je tangencijalna komponenta rezultantnog električnog polja na površi provodnog tela jednaka nuli. Kako rezultantno polje predstavlja zbir incidentnog polja, \mathbf{E}^{inc} , i rasejanog polja, $\mathbf{E}(\mathbf{J}_s)$, onda se ovaj granični uslov može napisati u obliku:

$$\left[\mathbf{E}(\mathbf{J}_s) + \mathbf{E}^{inc} \right]_{\tan} = 0, \quad (2.1)$$

gde \tan označava tangencijalnu komponentu.

Rasejano polje se može predstaviti u obliku:

$$\mathbf{E}(\mathbf{J}_s) = -Z\mathcal{L}\mathbf{J}_s, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}\mathbf{J}_s = \gamma \int_S \left[\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')g(R) - \frac{1}{\gamma^2} \nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \nabla g(R) \right] dS', \quad (2.3)$$

$$g(R) = \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{R}|, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad (2.4)$$

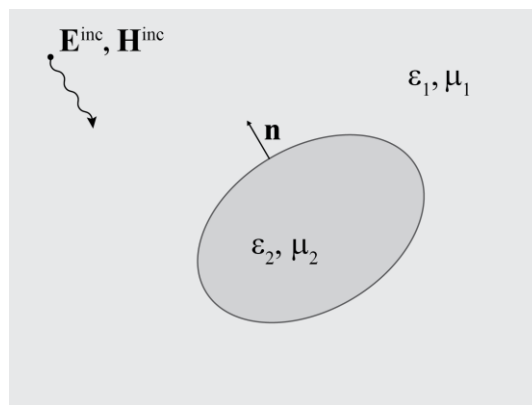
gde je Z karakteristična impedansa sredine, $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, \mathcal{L} je linearni operator, γ je koeficijent prostiranja EM polja, $\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, \mathbf{r}' je vektor položaja tačke izvora, \mathbf{r} je vektor položaja tačke u kojoj računamo polje, a $g(R)$ je Grinova funkcija. Nabla operator (∇) je vektorski diferencijalni operator, koji se u Dekartovom koordinatnom sistemu može izraziti kao $\nabla = \partial/\partial x \mathbf{i}_x + \partial/\partial y \mathbf{i}_y + \partial/\partial z \mathbf{i}_z$, gde su \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z jedinični vektori odgovarajućih pravaca, dok je ∇' nabla operator koji deluje na koordinate izvora (\mathbf{r}').

Integralnu jednačinu električnog polja tako možemo napisati kao:

$$[Z\mathcal{L}\mathbf{J}]_{\text{tan}} = [\mathbf{E}^{\text{inc}}]_{\text{tan}}. \quad (2.5)$$

2.2. Integralna jednačina PMCHWT

Posmatrajmo telo načinjeno od homogenog, linearnog i izotropnog materijala parametara ε_2 i μ_2 postavljeno u beskonačnom domenu koji je ispunjen homogenim, linearnim i izotropnim materijalom parametara ε_1 i μ_1 . Neka je telo pobuđeno prosto-periodičnim incidentnim elektromagnetskim poljem kružne učestanosti ω datim vektorom električnog polja \mathbf{E}^{inc} i vektorom magnetskog polja \mathbf{H}^{inc} (Slika 2.2).



Slika 2.2 Telo u homogenoj, linearnoj i izotropnoj sredini.

Rasejano EM polje, \mathbf{E}_1 i \mathbf{H}_1 u sredini 1 i \mathbf{E}_2 i \mathbf{H}_2 u sredini 2 kao izvore ima struje polarizacije i/ili magnetizacije koje su zapreminski raspodeljene u sredini 2.

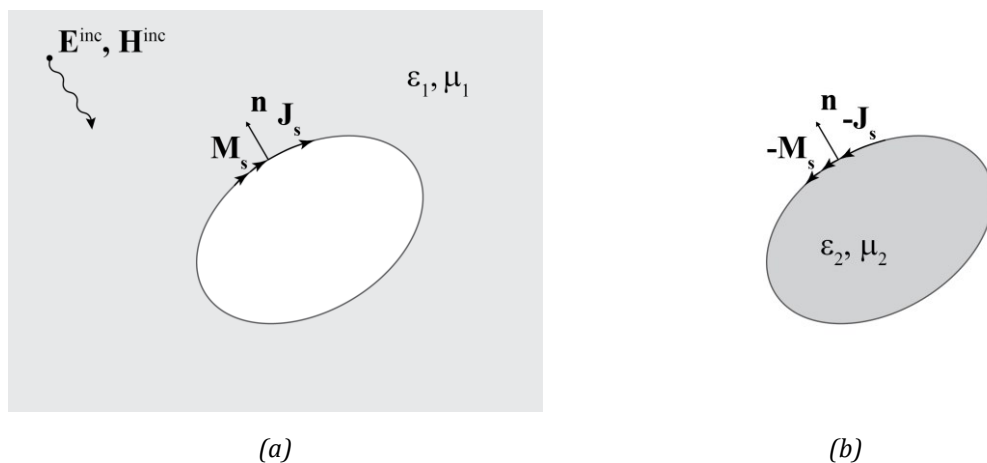
Problem zapreminski raspodeljenih nepoznatih veličina se može zameniti ekvivalentim problemom u kome su nepoznate veličine raspodeljene samo po graničnoj površi - korišćenjem teoreme ekvivalencije. Prema površinskoj teoremi ekvivalencije prvobitni problem sa dve sredine različitih parametara i pobudom u jednoj od njih se može dekomponovati na dva problema - problem ekvivalentne unutrašnjosti i problem ekvivalentne spoljašnjosti (Slike 2.3a i 2.3b, respektivno), uvođenjem ekvivalentnih struja \mathbf{J}_s i \mathbf{M}_s raspodeljenih samo po graničnoj površi dve sredine.

Površinske gustine ekvivalentnih električnih i magnetskih struja, \mathbf{J}_s i \mathbf{M}_s , za problem ekvivalentne unutrašnjosti, su date u svakoj tački granične površi izrazima:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}^{inc}) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{M}_s = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}^{inc}) = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2. \quad (2.6b)$$

Za problem ekvivalentne spoljašnjosti (Slika 2.3b) površinske gustine ekvivalentnih električnih i magnetskih struja su kao one kod problema ekvivalentne unutrašnjosti (Slika 2.3a), samo sa znakom minus.



Slika 2.3 Površinska teorema ekvivalencije za pobudu u spoljašnjoj sredini: (a) problem ekvivalentne unutrašnjosti, (b) problem ekvivalentne spoljašnjosti.

U ekvivalentnim problemima u delovima prostora čiji se uticaj ekvivalentira odgovarajućim površinskim strujama nema elektromagnetskog polja, tako da se ovi delovi prostora mogu formalno "ispuniti" materijalom identičnih parametara kao i sredine u kojoj se razmatra uticaj ekvivalentnih površinskih struja.

Na ovaj način se kompletan prostor ekvivalentnih problema homogenizuje i tada se rasejano polje može izraziti kao:

$$\mathbf{E}(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) = -Z\mathcal{L}\mathbf{J}_s + \mathcal{K}\mathbf{M}_s, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) = -\mathcal{K}\mathbf{J}_s - Y\mathcal{L}\mathbf{M}_s, \quad (2.7b)$$

gde je \mathcal{L} operator već definisan u poglavlju 2.1 (izrazom 2.3), \mathcal{K} je operator definisan preko:

$$\mathcal{K}\mathbf{J}_s = \int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \nabla g(R) dS', \quad (2.8)$$

i Y je karakteristična admitansa odgovarajuće sredine, $Y = 1/Z$.

Polazeći od različitih kombinacija graničnih uslova na granici dva dielektrika mogu se dobiti različite integralne jednačine. U ovom radu fokus je na integralnoj jednačini koja je poznata po skraćenici PMCHWT. Ovu formulaciju su uveli *Poggio* i *Miller*, dok su je *Chang* i *Harrington* primenili na cilindrična tela, a *Wu* i *Tsai* na tela sa rotacionom simetrijom. Samu skraćenicu su dali *Mautz* i *Harrington* na osnovu početnih slova autora formulacije.

Jednačina PMCHWT polazi od kombinacije graničnih uslova za tangencijalnu komponentu električnog polja i tangencijalnu komponentu magnetskog polja, tj. od uslova da su na granici dielektrika jednake tangencijalne komponente rezultantnog električnog polja i od uslova da su na granici dielektrika jednake tangencijalne komponente rezultantnog magnetskog polja:

$$\left[\mathbf{E}_1(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) + \mathbf{E}^{\text{inc}} \right]_{\text{tan}} = \left[\mathbf{E}_2(-\mathbf{J}_s, -\mathbf{M}_s) \right]_{\text{tan}}, \quad (2.9a)$$

$$\left[\mathbf{H}_1(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) + \mathbf{H}^{\text{inc}} \right]_{\text{tan}} = \left[\mathbf{H}_2(-\mathbf{J}_s, -\mathbf{M}_s) \right]_{\text{tan}}. \quad (2.9b)$$

Izražavanjem rasejanog polja preko \mathcal{L} i \mathcal{K} operatora ovi granični uslovi rezultuju integralnom jednačinom PMCHWT formulacije:

$$\left[Z_1\mathcal{L}_1\mathbf{J}_s + Z_2\mathcal{L}_2\mathbf{J}_s - \mathcal{K}_1\mathbf{M}_s - \mathcal{K}_2\mathbf{M}_s \right]_{\text{tan}} = \left[\mathbf{E}^{\text{inc}} \right]_{\text{tan}}, \quad (2.10a)$$

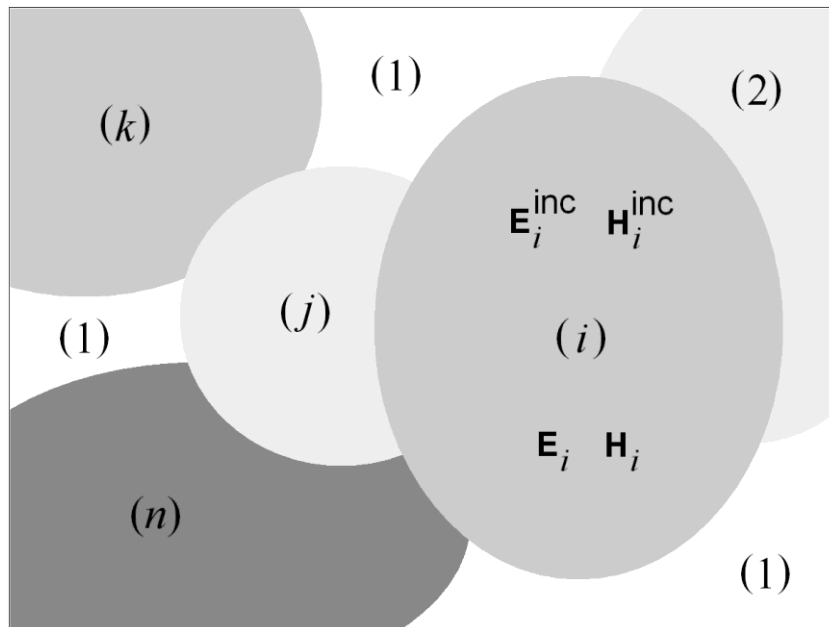
$$\left[\mathcal{K}_1\mathbf{J}_s + \mathcal{K}_2\mathbf{J}_s + Y_1\mathcal{L}_1\mathbf{M}_s + Y_2\mathcal{L}_2\mathbf{M}_s \right]_{\text{tan}} = \left[\mathbf{H}^{\text{inc}} \right]_{\text{tan}}, \quad (2.10b)$$

gde su Z_1 i Z_2 impedanse, Y_1 i Y_2 admitanse, \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_2 su \mathcal{L} operatori i \mathcal{K}_1 i \mathcal{K}_2 su \mathcal{K} operatori u sredinama 1 i 2, respektivno.

Integralna jednačina PMCHWT, kao i integralna jednačina EFIE, predstavljaju poseban slučaj površinske integralne jednačine.

2.3. Opšti oblik sistema površinskih integralnih jednačina

Neka je kompletan prostor podeljen na n regiona ispunjenih homogenim, linearnim i izotropnim materijalima parametara ϵ_i i μ_i , $i=1,\dots,n$, i pritom je prvi region beskonačan i okružuje sve ostale regione, kao na Slici 2.4. U opštem slučaju svaki od regiona je pobuđen incidentnim elektromagnetskim poljem kružne učestanosti ω datim vektorom električnog polja $\mathbf{E}_i^{\text{inc}}$ i vektorom magnetskog polja $\mathbf{H}_i^{\text{inc}}$, $i=1,\dots,n$. Rasejano elektromagnetsko polje u svakom od regiona zajedno sa odgovarajućim incidentnim poljem daje ukupno polje u svakom od regiona \mathbf{E}_i i \mathbf{H}_i , $i=1,\dots,n$.



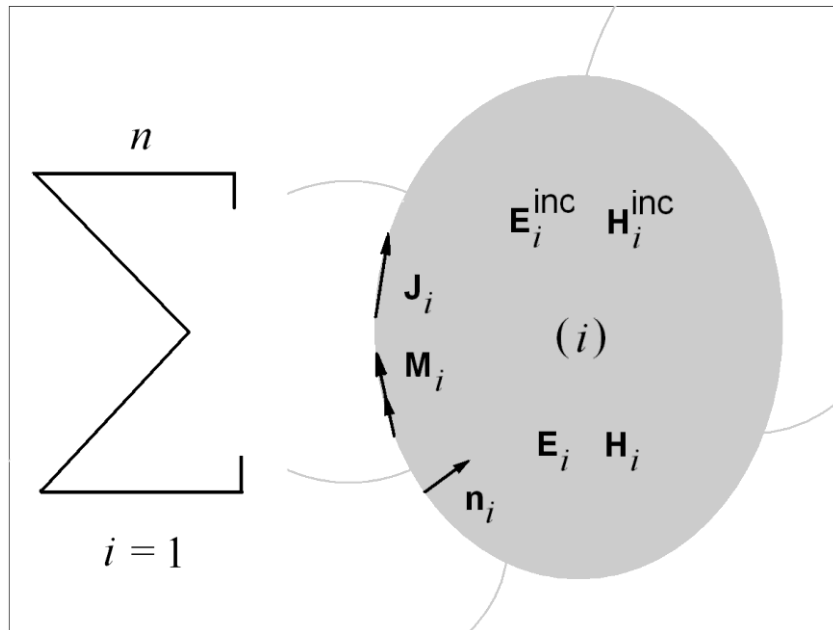
Slika 2.4 Elektromagnetski problem rasejanja sastavljen od n homogenih regiona.

Koristeći površinsku teoremu ekvivalencije, uticaj svih spoljnih regiona na elektromagnetsko polje unutar i -tog regiona se može zameniti ekvivalentnim površinskim gustinama električnih i magnetskih struja \mathbf{J}_i i \mathbf{M}_i na graničnoj površi regiona. Dovodeći u vezu ekvivalentne površinske gustine struja sa ukupnim poljima na graničnoj površi preko $\mathbf{J}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_i$ i $\mathbf{M}_i = -\mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i$, gde je \mathbf{n}_i jedinični vektor normale ka unutrašnjosti, obezbeđuje se da je ukupno polje van i -tog regiona jednako nuli. Takođe, površinske gustine ekvivalentnih struja na

razdvojnoj površi i -tog i j -tog regiona su, zbog kontinualnosti tangencijalnih komponentata polja, istih amplituda i suprotnog smera, odnosno:

$$\mathbf{J}_i = -\mathbf{J}_j = \mathbf{J}_{ij}, \quad \mathbf{M}_i = -\mathbf{M}_j = \mathbf{M}_{ij}. \quad (2.11a,b)$$

Na ovaj način se problem sa više regiona koji inicijalno ima ukupno n regiona svodi na n pojedinačnih problema sa po samo jednim regionom, kao na Slici 2.5 gde su rasejana polja u svakom regionu izražena preko ekvivalentnih površinskih gustina struja [4].



Slika 2.5 Transformacija problema sa n regiona u n problema sa po jednim regionom korišćenjem površinske teoreme ekvivalencije.

Ekvivalentne površinske gustine struja se mogu odrediti postavljanjem odgovarajućih graničnih uslova na razdvojnim površima. Svaki od graničnih uslova za i -ti region se može dobiti kao linearna kombinacija uslova da su i tangencijalna i normalna komponenta kako ukupnog električnog polja \mathbf{E}_i , tako i ukupnog magnetskog polja \mathbf{H}_i jednake nuli tik uz graničnu površ regiona (sa spoljašnje strane regiona):

$$[\mathbf{E}_i]_{\text{tan}} = 0, \quad [\mathbf{H}_i]_{\text{tan}} = 0, \quad \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_i = 0, \quad \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{H}_i = 0. \quad (2.12a,b,c,d)$$

Posebno, granični uslovi za tangencijane komponente se mogu napisati i kao:

$$\mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i = 0, \quad \mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_i = 0. \quad (2.12e,f)$$

Ukupno električno i magnetsko polje u i -tom regionu se dobija kao zbir rasejanog i incidentnog polja:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i(\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i) + \mathbf{E}_i^{\text{inc}}, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i(\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i) + \mathbf{H}_i^{\text{inc}}. \quad (2.13a,b)$$

Kao i u poglavlju 2.2 (izraz 2.7), rasejano električno i magnetsko polje usled električnih i magnetskih struja je dato u obliku:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i) = -Z_i \mathcal{L}_i \mathbf{J}_i + \mathcal{K}_i \mathbf{M}_i, \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i) = -\mathcal{K}_i \mathbf{J}_i - Y_i \mathcal{L}_i \mathbf{M}_i. \quad (2.14b)$$

Izražavajući ukupna polja u graničnim uslovima preko incidentnih polja i električnih i magnetskih struja dobijaju se integralne jednačine. Tako se, za osnovne granične uslove (2.12), dobijaju odgovarajuće osnovne integralne jednačine kao:

$$[Z_i \mathcal{L}_i \mathbf{J}_i - \mathcal{K}_i \mathbf{M}_i]_{\text{tan}} = [\mathbf{E}_i^{\text{inc}}]_{\text{tan}}, \quad (2.15a)$$

$$[\mathcal{K}_i \mathbf{J}_i + Y_i \mathcal{L}_i \mathbf{M}_i]_{\text{tan}} = [\mathbf{H}_i^{\text{inc}}]_{\text{tan}}, \quad (2.15b)$$

$$Z_i \mathbf{n}_i \cdot \mathcal{L}_i \mathbf{J}_i - \mathbf{n}_i \cdot \mathcal{K}_i \mathbf{M}_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_i^{\text{inc}}, \quad (2.15c)$$

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathcal{K}_i \mathbf{J}_i + Y_i \mathbf{n}_i \cdot \mathcal{L}_i \mathbf{M}_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{H}_i^{\text{inc}}, \quad (2.15d)$$

$$Z_i \mathbf{n}_i \times \mathcal{L}_i \mathbf{J}_i - \mathbf{n}_i \times \mathcal{K}_i \mathbf{M}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i^{\text{inc}}, \quad (2.15e)$$

$$\mathbf{n}_i \times \mathcal{K}_i \mathbf{J}_i + Y_i \mathbf{n}_i \times \mathcal{L}_i \mathbf{M}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_i^{\text{inc}}. \quad (2.15f)$$

Jednačine (2.15a) i (2.15e) su dobro poznate EFIE jednačine, dok su jednačine (2.15b) i (2.15f) dobro poznate integralne jednačine magnetskog polja (MFIE). Iako su dva oblika EFIE (MFIE) jednačina ekvivalentni, njihova MoM rešenja nakon testiranja istim funkcijama bazisa nisu identična. Upravo zbog toga neki autori jednačine (2.15a) i (2.15b) označavaju kao T-EFIE i T-MFIE, a jednačine (2.15e) i (2.15f) kao N-EFIE i N-MFIE [93].

Umesto da se najpre kombinuju osnovni granični uslovi (2.12a-f) i onda ukupna polja izraze preko incidentnih polja i električnih i magnetskih struja kako bi se dobila proizvoljna površinska integralna jednačina, uobičajeno je da se udružuju osnovne integralne jednačine (2.15a-f) i primene na svaki od n regiona. U opštem slučaju ishod takvog linearnog kombinovanja nije jedna integralna jednačina, već sistem integralnih jednačina.

Ukoliko se razmatra PMCHWT formulacija za samo dva regiona ($n=2$) koji imaju jednu graničnu površ, na osnovu (2.11) nepoznate veličine su električne struje $\mathbf{J}_{12}=\mathbf{J}_1=-\mathbf{J}_2$ i magnetske struje $\mathbf{M}_{12}=\mathbf{M}_1=-\mathbf{M}_2$ na razdvojnoj površi. Integralna jednačina zasnovana na graničnim uslovima za jednakost tangencijalnih komponentata električnog i magnetskog polja sa obe strane razdvojne površi rezultuje sistemom od dve integralne jednačine – jedne električnog tipa i jedne magnetskog tipa. Do integralne jednačine električnog/magnetskog tipa se drugačije može doći oduzimanjem (2.15a)/(2.15b) za drugi region od (2.15a)/(2.15b) za prvi region.

Ovaj sistem površinskih integralnih jednačina se u matičnom obliku može napisati kao:

$$\begin{bmatrix} (Z_1\mathcal{L}_1 + Z_2\mathcal{L}_2)_{\tan} & -(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)_{\tan} \\ (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)_{\tan} & (Y_1\mathcal{L}_1 + Y_2\mathcal{L}_2)_{\tan} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{M}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_1^{\text{inc}} - \mathbf{E}_2^{\text{inc}})_{\tan} \\ (\mathbf{H}_1^{\text{inc}} - \mathbf{H}_2^{\text{inc}})_{\tan} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

U ovom slučaju imamo dve vrste vektorskih izvora na jednoj graničnoj površi i dve odgovarajuće vrste vektorskih integralnih jednačina. Ovaj problem možemo modifikovati na sledeće načine:

- ukoliko je drugi od ova dva regiona savršeno provodan (PEC), magnetske struje se mogu izostaviti, odnosno postoji samo jedan tip izvora na jednoj graničnoj površi, i par površinskih integralnih jednačina (2.16) se svodi na jednu jednačinu $[Z_1\mathcal{L}_1\mathbf{J}_{12}]_{\tan} = [\mathbf{E}_1^{\text{inc}}]_{\tan}$;
- ukoliko se doda treći region tako da je u vezi samo sa prvim, javlja se još jedna granična površ, između regiona 1 i 3, i dodatne struje \mathbf{J}_{13} i \mathbf{M}_{13} , te je par površinskih integralnih jednačina (2.16) postavljen za razdvojnu površ između regiona 1 i 2 potrebno dopuniti dodatnim parom površinskih integralnih jednačina tipa (2.16) za razdvojnu površ između regiona 1 i 3.

Imajući u vidu prethodno navedeno, može se zaključiti da je u opštem slučaju potrebna jedna integralna jednačina za svaku vrstu izvora na svakoj razdvojnoj površi.

Neka je ukupan broj izvora (integralnih jednačina) m . Tada se sistem površinskih integralnih jednačina može napisati u opštem obliku kao:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11} & \cdots & \mathcal{J}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{J}_{m1} & \cdots & \mathcal{J}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_m \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

gde su \mathcal{J}_{kl} , $k, l = 1, \dots, m$, linearni operatori koji deluju na različite vrste izvora \mathbf{f}_l , $l = 1, \dots, m$, i \mathbf{g}_k , $k = 1, \dots, m$, su odgovarajuće eksitacije.

Za rešavanje sistema površinskih integralnih jednačina kao forme linearnih operatorskih jednačina integralnog tipa u frekvencijskom domenu se po pravilu koristi metoda momenata.

2.4. Osnovni elementi metode momenata

U širem smislu, metoda momenata je opšta metoda rešavanja linearnih operatorskih jednačina. U kontekstu rešavanje problema elektromagnetskog polja njenom primenom se jednačine polja transformišu u sistem linearnih jednačina. Metoda momenata je najpre korišćena za pojedinačne klase problema, poput analize tankih žičanih antena ranih 1950-ih, da bi *Harrington* prvi sistematski istražio primenu MoM-a za rešavanje problema elektromagnetskog polja i to objavio u svojoj knjizi 1968. godine [1]. Linearne operatorske jednačine mogu biti integralnog ili diferencijalnog tipa i primena MoM-a za njihovo rešavanje se značajno razlikuje u ova dva slučaja. U ovom radu se razmatraju linearne operatorske jednačine integralnog tipa.

Linearna operatorska jednačina ima opšti oblik:

$$\mathcal{J}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (2.18)$$

gde je \mathcal{J} linearni operator, \mathbf{g} je poznata funkcija (pobuda), i \mathbf{f} je nepoznata funkcija koju je potrebno odrediti (odziv).

Numeričko rešenje linearne operatorske jednačine se uvek zasniva na aproksimaciji nepoznate funkcije \mathbf{f} . Najčešće se ova aproksimacija, \mathbf{f}_a , usvaja kao konačna suma:

$$\mathbf{f}_a = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{f}_j, \quad (2.19)$$

gde je N red aproksimacije, \mathbf{f}_j su poznate funkcije, a a_j su nepoznati koeficijenti koje treba odrediti. Na ovaj način se beskonačan broj nepoznatih vrednosti polazne funkcije \mathbf{f} svodi na N nepoznatih koeficijenata. Poznate funkcije, \mathbf{f}_j , se nazivaju funkcijama bazisa ili funkcijama razvoja.

Zamenom aproksimacije, \mathbf{f}_a , u linearnu operatorsku jednačinu (2.18) dobija se aproksimativna jednačina:

$$\sum_{j=1}^N a_j \mathcal{J}[\mathbf{f}_j(\mathbf{r}')] \approx \mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (2.20)$$

Definicija same funkcije bazisa, pored matematičkog izraza funkcije, uključuje i opis geometrijskog elementa (linijskog segmenta, površinskog ili zapreminskog elementa) na kome je funkcija bazisa definisana. Ukoliko je samo jedna funkcija bazisa definisana na jednom geometrijskom elementu strukture tada se kaže da se radi o aproksimaciji nepoznate funkcije funkcijama bazisa nultog reda. Kada je više funkcija bazisa definisano na istim elementima, tada se radi o aproksimaciji nepoznate funkcije funkcijama bazisa višeg reda. Iako teže za implementaciju, funkcije bazisa višeg reda imaju ogroman potencijal u pogledu značajnog povećanja efikasnosti analize.

Tačnost aproksimacije, a time i tačnost i efikasnost analize, zavisi od reda aproksimacije i izbora funkcija bazisa. Izbor funkcija bazisa se sastoji od dve faze. Prva faza, takozvano geometrijsko modelovanje, predstavlja usvajanje reprezentacije strukture koja se analizira preko jednostavnih geometrijskih elemenata (segmenata, površi, zapremina). Druga faza je aproksimacija nepoznate funkcije u užem smislu i sastoji se u definisanju matematičkog izraza za funkcije bazisa.

Unutrašnji proizvod funkcija p i q , koji se označava kao $\langle p, q \rangle$, je skalarna veličina koja se definiše kao:

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Omega} p^* \oplus q d\Omega, \quad (2.21)$$

gde je \oplus operacija množenja ukoliko su p i q skalarne funkcije, odnosno skalarni proizvod ukoliko su p i q vektorske funkcije, dok $*$ označava operaciju konjugovanja.

Kod metode momenata sistem linearnih jednačina se za datu linearnu operatorsku jednačinu formalno dobija formiranjem unutrašnjih proizvoda težinskih funkcija, $\mathbf{w}_i, i = 1, \dots, N$, i aproksimativne jednačine (2.20):

$$\sum_{j=1}^N a_j \langle \mathbf{w}_i, \mathcal{F} \mathbf{f}_j \rangle = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{g} \rangle, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.22)$$

odnosno, u matricnoj formi:

$$\mathbf{Z} \mathbf{a} = \mathbf{v}, \quad (2.23)$$

gde je $z_{ij} = \langle \mathbf{w}_i, \mathcal{F} \mathbf{f}_j \rangle$, $v_i = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{g} \rangle$.

Ovaj način transformisanja aproksimativne jednačine u sistem linearnih jednačina se naziva testiranjem (procedura testiranja). U tom slučaju se težinske funkcije, $\mathbf{w}_j, j = 1, \dots, N$, nazivaju test funkcijama.

Opšta metoda za rešavanje linearnih operatorskih jednačina u elektromagnetici poznata kao MoM se sastoji od sledećih koraka:

- polazeći od linearne operatorske jednačine (2.18),
- nepoznata funkcija se aproksimira u formi konačne sume poznatih funkcija bazisa pomnoženih nepoznatim koeficijentima (2.19),
- takva aproksimacija (2.19) se zamenjuje u (2.18), što daje aproksimativnu jednačinu (2.20),
- aproksimativna jednačina (2.20) se testiranjem transformiše u sistem linearnih jednačina (2.22),
- nepoznati koeficijenti se određuju rešavanjem sistema linearnih jednačina (2.22).

Fokus u ovom radu je na primeni metode momenata na integralne jednačine i to korišćenjem Galerkinove metode testiranja.

2.5. MoM rešenje sistema površinskih integralnih jednačina

Primena metode momenata se može proširiti na sistem površinskih integralnih jednačina (2.17) napisan u obliku:

$$\sum_{l=1}^m \mathcal{J}_{kl} \mathbf{f}_l = \mathbf{g}_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.24)$$

Nepoznate funkcije \mathbf{f}_l , $l = 1, \dots, m$ se aproksimiraju linearnom kombinacijom N_l poznatih, međusobno nezavisnih, vektorskih funkcija bazisa \mathbf{f}_{l_j} pomnoženih nepoznatim koeficijentima a_{lj} , preko:

$$\mathbf{f}_{l_a} = \sum_{j=1}^{N_l} a_{lj} \mathbf{f}_{l_j}, \quad l = 1, \dots, m. \quad (2.25)$$

Zamenom \mathbf{f}_{l_a} umesto \mathbf{f}_l u (2.24), ostatak linearne operatorske jednačine (2.24) se može napisati u obliku:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{g}_k - \sum_{l=1}^m \mathcal{J}_{kl} \mathbf{f}_{l_a} = \mathbf{g}_k - \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{N_l} a_{lj} \mathcal{J}_{kl} \mathbf{f}_{l_j}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.26)$$

Unutrašnji proizvodi ostataka i poznatih, međusobno nezavisnih, vektorskih test funkcija \mathbf{w}_{ki} , $i = 1, \dots, N_k$, $k = 1, \dots, m$, se izjednačavaju sa nulom, $\langle \mathbf{w}_{ki}, \mathbf{R}_k \rangle = 0$, čime se dobija sistem linearnih jednačina u formi:

$$\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{N_l} z_{klj} a_{lj} = v_{ki}, \quad i = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.27a)$$

$$z_{klj} = \langle \mathbf{w}_{ki}, \mathcal{J}_{kl} \mathbf{f}_{l_j} \rangle, \quad v_{ki} = \langle \mathbf{w}_{ki}, \mathbf{g}_k \rangle. \quad (2.27b,c)$$

Ovaj sistem linearnih jednačina se može napisati u matricnoj formi kao:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \cdots & \mathbf{Z}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{m1} & \cdots & \mathbf{Z}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

gde su \mathbf{Z}_{kl} sub-matrice reda $N_k \times N_l$ sa elementima z_{klj} , \mathbf{a}_l su sub-kolone reda N_l sa elementima a_{lj} , i \mathbf{v}_k su sub-kolone reda N_k sa elementima v_{ki} .

Sistem linearnih jednačina (2.27), koji se dobija na osnovu sistema površinskih integralnih jednačina, i njegova matična reprezentacija (2.28), se mogu napisati u obliku (2.22) i (2.23), respektivno, imajući u vidu da važi:

$$z_{ij} = z_{kli'j'}, \quad a_j = a_{ij'}, \quad v_i = v_{ki'}, \quad (2.29a,b,c)$$

gde su indeksi ova dva sistema povezani preko:

$$i = \sum_{k'=1}^{k-1} N_{k'} + i', \quad j = \sum_{l'=1}^{l-1} N_{l'} + j'. \quad (2.30a,b)$$

2.6. Primena Galerkinove metode na rešavanje integralnih jednačina

Kod Galerkinove metode za rešavanje linearnih operatorskih jednačina kao težinske funkcije kod formiranja sistema linearnih jednačina preko unutrašnjih proizvoda koriste se upravo funkcije bazisa kao test funkcije, odnosno $\mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i$. Tada se sistem jednačina (2.22) može napisati kao:

$$\sum_{j=1}^N a_j z_{ij} = v_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.31)$$

gde je $z_{ij} = \langle \mathbf{f}_i, \mathcal{J}\mathbf{f}_j \rangle$ i $v_i = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g} \rangle$. Matični elementi z_{ij} se nazivaju impedansama, a odgovarajuća matrica matricom impedansi po analogiji sa prirodom fizičkih veličina koje se javljaju primenom Galerkinove metode za rešavanje problema tankih žičanih antena, što je bila i prva klasa elektromagnetskih problema koji su njome rešavani.

Impedanse \mathcal{L} i \mathcal{K} operatora za vektorsku test funkciju \mathbf{F}_k i vektorsku funkciju bazisa \mathbf{F}_l imaju sledeće opšte izraze:

$$Z_{kl}^{\mathcal{L}} = \langle \mathbf{F}_k, \mathcal{L}\mathbf{F}_l \rangle = \int_{S_k} \mathbf{F}_k^* \cdot \mathcal{L}\mathbf{F}_l dS, \quad (2.32a)$$

$$Z_{kl}^{\mathcal{K}} = \langle \mathbf{F}_k, \mathcal{K}\mathbf{F}_l \rangle = \int_{S_k} \mathbf{F}_k^* \cdot \mathcal{K}\mathbf{F}_l dS. \quad (2.32b)$$

Zamenom definicionih izraza za \mathcal{L} i \mathcal{K} operatore, nakon određenih transformacija, dobija se:

$$Z_{kl}^{\mathcal{L}} = \gamma \int \int_{S_k S_l} \left[\mathbf{F}_l(\mathbf{r}_l) \cdot \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) + \frac{1}{\gamma^2} \nabla_l \cdot \mathbf{F}_l(\mathbf{r}_l) \nabla_k \cdot \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) \right] g(R) dS_l dS_k, \quad (2.33a)$$

$$Z_{kl}^{\mathcal{K}} = \int \int_{S_k S_l} (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) \cdot [\mathbf{F}_l(\mathbf{r}_l) \times \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k)] \frac{1}{R} \frac{dg(R)}{dR} dS_l dS_k. \quad (2.33b)$$

Ovde je važno primetiti simetriju, odnosno imamo da važi $Z_{kl}^{\mathcal{L}} = Z_{lk}^{\mathcal{L}}$ i $Z_{kl}^{\mathcal{K}} = Z_{lk}^{\mathcal{K}}$.

Usvojimo da je kod integralne jednačine električnog polja aproksimativna funkcija \mathbf{J}_{sa} data preko vektorskih funkcija bazisa, \mathbf{F}_j , $j = 1, \dots, N$, kao:

$$\mathbf{J}_{sa} = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{F}_j. \quad (2.34)$$

Polazeći od integralne jednačine električnog polja (2.5), nakon testiranja funkcijama bazisa koje nemaju normalnu komponentu, imamo:

$$\sum_{l=1}^N a_l \langle \mathbf{F}_k, Z \mathcal{L} \mathbf{F}_l \rangle = \langle \mathbf{F}_k, \mathbf{E}^{inc} \rangle, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.35)$$

Tako, za integralnu jednačinu električnog polja, dobijamo:

$$z_{ji} = Z Z_{ji}^{\mathcal{L}} = Z Z_{ij}^{\mathcal{L}} = z_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.36)$$

odnosno, matrica impedansi kod EFIE je simetrična.

Analogno, neka su kod integralne jednačine PMCHWT aproksimativne funkcije \mathbf{J}_{sa} i \mathbf{M}_{sa} date preko vektorskih funkcija bazisa \mathbf{F}_j , $j = 1, \dots, n$ kao:

$$\mathbf{J}_{sa} = \sum_{j=1}^n a_{e_j} \mathbf{F}_j, \quad (2.37a)$$

$$\mathbf{M}_{sa} = \sum_{j=1}^n a_{m_j} \mathbf{F}_j, \quad (2.37b)$$

odnosno neka se koriste identične funkcije bazisa i za električne i za magnetske struje, dok su nepoznati koeficijenti uređeni tako da koeficijenti magnetskih struja slede posle koeficijenata električnih struja.

Polazeći od integralne jednačine PMCHWT iz poglavlja 2.2 (izraz (2.10)), nakon testiranja funkcijama bazisa koje nemaju normalnu komponentu, imamo, za $k = 1, \dots, n$:

$$\sum_{l=1}^n a_{el} \langle \mathbf{F}_k, Z_1 \mathcal{L}_1 \mathbf{F}_l + Z_2 \mathcal{L}_2 \mathbf{F}_l \rangle + \sum_{l=1}^n a_{ml} \langle \mathbf{F}_k, -\mathcal{K}_1 \mathbf{F}_l - \mathcal{K}_2 \mathbf{F}_l \rangle = \langle \mathbf{F}_k, \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle, \quad (2.38a)$$

$$\sum_{l=1}^n a_{el} \langle \mathbf{F}_k, \mathcal{K}_1 \mathbf{F}_l + \mathcal{K}_2 \mathbf{F}_l \rangle + \sum_{l=1}^n a_{ml} \langle \mathbf{F}_k, Y_1 \mathcal{L}_1 \mathbf{F}_l + Y_2 \mathcal{L}_2 \mathbf{F}_l \rangle = \langle \mathbf{F}_k, \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle. \quad (2.38b)$$

Matrica impedansi ovog sistema linearnih jednačina ima blokovsku reprezentaciju oblika $\left[\begin{array}{c|c} z_{kl} & z_{kn+l} \\ \hline z_{n+kl} & z_{n+kn+l} \end{array} \right]$, gde važi, za $k = 1, \dots, n$ i $l = 1, \dots, n$:

$$z_{kl} = Z_1 Z_{kl}^{\mathcal{L}_1} + Z_2 Z_{kl}^{\mathcal{L}_2} = Z_1 Z_{lk}^{\mathcal{L}_1} + Z_2 Z_{lk}^{\mathcal{L}_2} = z_{lk}, \quad (2.39a)$$

$$z_{kn+l} = -Z_{kl}^{\mathcal{K}_1} - Z_{kl}^{\mathcal{K}_2} = -Z_{lk}^{\mathcal{K}_1} - Z_{lk}^{\mathcal{K}_2} = z_{ln+k}, \quad (2.39b)$$

$$z_{n+kl} = Z_{kl}^{\mathcal{K}_1} + Z_{kl}^{\mathcal{K}_2} = Z_{lk}^{\mathcal{K}_1} + Z_{lk}^{\mathcal{K}_2} = z_{n+l+k} = -z_{ln+k} = -z_{kn+l}, \quad (2.39c)$$

$$z_{n+kn+l} = Y_1 Z_{kl}^{\mathcal{L}_1} + Y_2 Z_{kl}^{\mathcal{L}_2} = Y_1 Z_{lk}^{\mathcal{L}_1} + Y_2 Z_{lk}^{\mathcal{L}_2} = z_{n+l+n+k}. \quad (2.39d)$$

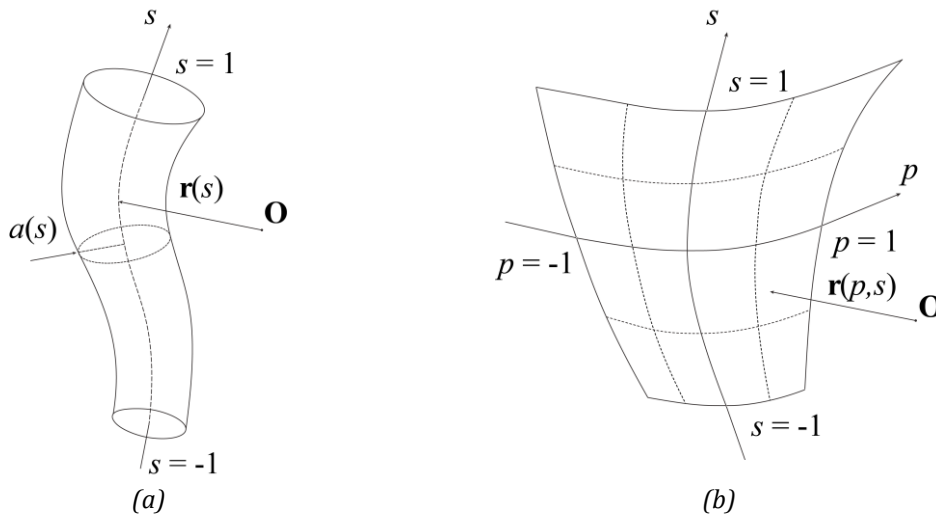
Primećujemo da je svaki od blokova z_{kl} , z_{kn+l} , z_{n+kl} i z_{n+kn+l} simetričan, kao i da se blokovi z_{kn+l} i z_{n+kl} razlikuju samo u predznaku. Ukoliko se vrste koje odgovaraju indeksima magnetskih struja pomnože faktorom -1 matrica impedansi postaje simetrična.

2.7. Funkcije bazisa višeg reda

Izbor funkcija bazisa kao prvu fazu ima geometrijsko modelovanje (matematički opis geometrije strukture) koje ima za cilj predstavljanje složene metalno-dielektrične strukture odgovarajućom kombinacijom gradivnih elemenata. Gradivni elementi u geometrijskom modelovanju su u opštem slučaju linearni segmenti, površinski i zapreminski elementi i poželjno je da se na njima aproksimativne funkcije mogu definisati na što jednostavniji način. Pored globalnog koordinatnog sistema, u kome se definiše struktura u celini kao i tačke u kojima se izračunavaju veličine od interesa, svaki od sastavnih elemenata strukture ima lokalni koordinatni sistem u kome se definiše odgovarajuća nepoznata veličina.

Geometrijsko modelovanje po svojoj prirodi može biti egzaktno ili približno. Egzaktno modelovanje insistira na tačnom predstavljanju geometrije strukture, što uslovljava korišćenje različitog broja raznovrsnih tipova gradivnih elemenata u zavisnosti od same strukture. Približnim modelovanjem se uz pomoć što manje različitih tipova gradivnih elemenata želi postići dovoljno tačna geometrijska reprezentacija.

Kod praktično svih numeričkih metoda za elektromagnetsko modelovanje linijski, površinski i zapreminski elementi se mogu smatrati posebnim slučajevima generalizovanih žica, četvorouglova (ili trouglova) i heksaedara (ili tetraedara) koji se koriste kako za egzaktno, tako i za približno modelovanje složenih struktura. Kako je u ovom radu fokus na površinskim integralnim jednačinama u narednom delu ovog poglavlja biće razmatrani elementi koji se baziraju na generalizovanim žicama i četvorouglovima.



Slika 2.6 Generalizovana žica (a), i generalizovani četvorougao (b).

Generalizovana žica predstavlja metalno telo u obliku krivolinijskog cilindra kružnog poprečnog preseka promenljivog poluprečnika (Slika 2.6a). Smatra se da je osa generalizovane žice neprekidna i glatka kriva, kao i da se poluprečnik duž ose menja kao neprekidna i glatka funkcija.

Geometrija generalizovane žice je u potpunosti određena parametarskim jednačinama ose i poluprečnika:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(s), \quad a = a(s), \quad -1 \leq s \leq 1, \quad (2.40a,b)$$

gde je s parametarska koordinata duž ose žice, dok su $s = -1$ i $s = 1$ koordinate početka i kraja žice, respektivno.

Generalizovani četvorougao u širem smislu je zakrivljeni krivolinijski četvorougao. U užem smislu (Slika 2.6b) je definisan parametarskom jednačinom:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, s), \quad -1 \leq p, s \leq 1, \quad (2.41)$$

gde su p i s proizvoljne lokalne koordinate vezane za površ, dok su koordinate ivica četvorougla date sa $p, s = \pm 1$.

Sve geometrijske veličine od interesa, poput elemenata dužine, površine, jediničnih vektora i slično se jednostavno mogu dobiti polazeći od parametarske jednačine (2.41). Ove veličine je pogodno izraziti preko takozvanih kovarijantnih unitarnih vektora \mathbf{a}_p i \mathbf{a}_s definisanih kao:

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{r}(p, s)}{dp}, \quad \mathbf{a}_s = \frac{d\mathbf{r}(p, s)}{ds}. \quad (2.42a, b)$$

Elementi dužine dl_p i dl_s duž koordinatnih linija, koji odgovaraju priraštajima dp i ds koordinata p i s se dobijaju preko:

$$dl_p = e_p dp, \quad dl_s = e_s ds, \quad e_p = |\mathbf{a}_p|, \quad e_s = |\mathbf{a}_s|, \quad (2.43a, b, c, d)$$

gde su e_p i e_s takozvani Laméovi koeficijenti.

Jedinični vektori lokalnog koordinatnog sistema se u svakoj tački površinskog elementa dobijaju kao:

$$\mathbf{i}_p = \frac{\mathbf{a}_p}{e_p}, \quad \mathbf{i}_s = \frac{\mathbf{a}_s}{e_s}. \quad (2.44a, b)$$

Površina površinskog elementa dS se može izraziti preko:

$$dS = dl_p dl_s \sin \alpha_{ps} = |\mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_s| dp ds, \quad (2.45)$$

gde je α_{ps} lokalni ugao između p - i s -koordinatnih linija.

Generalizovani četvorouglovi se koriste za modelovanje metalnih i dielektričnih razdvojnih površi praćenih površinskim električnim i ekvivalentnim (električnim i magnetskim) strujama, respektivno. Obe vrste površinskih struja, i električne i magnetske, se aproksimiraju na isti način, tako da će u nastavku biti dati samo izrazi za aproksimacije električnih struja.

Kako je četvorougao definisan u lokalnom ps -koordinatnom sistemu, nameće se razvoj struja u istom koordinatnom sistemu preko p - i s -komponentata kao:

$$\mathbf{J}_s(p, s) = J_{sp}(p, s)\mathbf{i}_p(p, s) + J_{ss}(p, s)\mathbf{i}_s(p, s), \quad (2.46)$$

gde su \mathbf{i}_p i \mathbf{i}_s jedinični vektori duž p - i s -koordinatnih linija. Kako se p -komponenta struje može tretirati na potpuno isti način kao i s -komponenta definisana nad istim četvorouglom, uz zamenjene p - i s -koordinate, to se raspodela površinskih struja može pisati samo za s -komponentu, a podrazumevati da postoji i analogna p -komponenta.

Za struju generalizovane žice imamo izraz:

$$I_s(s) \cdot \mathbf{i}_s = \frac{\mathbf{a}_s}{|\mathbf{a}_s|} \sum_{j=0}^{n_s} a_j S_j(s). \quad (2.47)$$

Celo-domenska aproksimacija s -komponente površinske struje nad generalizovanim četvorouglom se usvaja u formi:

$$\mathbf{J}_s(p, s) = \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=0}^{n_s} a_{ij} \mathbf{F}_{ij}(p, s), \quad (2.48a)$$

$$\mathbf{F}_{ij}(p, s) = \frac{P_i(p)S_j(s)}{2|\mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_s|} \mathbf{a}_s, \quad -1 \leq p, s \leq 1, \quad (2.48b)$$

gde su n_p i n_s redovi aproksimacije duž p - i s -koordinata, a_{ij} su nepoznati koeficijenti koje treba odrediti, $\mathbf{F}_{ij}(p, s)$ su poznate vektorske funkcije bazisa, a $P_i(p)$ i $S_j(s)$ su zadate funkcije bazisa po p - i s -koordinatama pojedinačno.

Jednostavne hijerarhijske funkcije bazisa višeg reda poznate pod nazivom klasične funkcije bazisa višeg reda su date preko:

$$P_i(p) = p^i, \quad S_j(s) = \begin{cases} 1-s & j=0 \\ 1+s & j=1 \\ s^j - 1 & j=2k \\ s^j - s & j=2k+1 \end{cases}, \quad (2.49a,b)$$

dok modifikovane funkcije bazisa višeg reda imaju izmenjene $S_j(s)$ funkcije date kao:

$$P_i(p) = p^i, \quad S_j(s) = \begin{cases} 1-s & j=0 \\ 1+s & j=1 \\ s^j - s^{j-2} & j \geq 2 \end{cases} \quad (2.50a,b)$$

Ovako usvojene funkcije bazisa omogućavaju automatsko zadovoljenje jednačina kontinuiteta na krajevima i spojevima elemenata.

Funkcije bazisa definisane samo na jednom elementu se nazivaju singletima ($j \geq 2$ u izrazima (2.49b) i (2.50b)), dok se funkcije bazisa koje su definisane nad parovima susednih elemenata nazivaju dubletima ($j=0, j=1$ u izrazima (2.49b) i (2.50b)). Generalnije, funkcije bazisa koje su definisane nad m međusobno povezanih elemenata se nazivaju multipletima (multipolovima).

Singleti imaju nulte vrednost na krajevima (i spojevima) elemenata, dok dubleti (odnosno multipleti) imaju nenultu vrednost (najčešće jediničnu) na spojevima elemenata, čime se obezbeđuje kontinuitet struja.

2.8. Rezime

U ovoj glavi su predstavljena dva tipična predstavnika površinskih integralnih jednačina koje će biti korišćene u ovom radu. To su integralna jednačina električnog polja i integralna jednačina PMCHWT. Zatim je, na osnovu teoreme površinske ekvivalencije, pokazano kako se u opštem slušaju formira sistem površinskih integralnih jednačina za strukture sa više domena. Tako dobiven sistem površinskih integralnih jednačina se svodi na sistem linearnih jednačina primenom metode momenata. Metoda momenata se zasniva na adekvatnoj aproksimaciji nepoznatih veličina i testiranju jednačina izabranim test funkcijama. U ovom radu se za test funkcije usvajaju funkcije bazisa, odnosno radi se Galerkinovo testiranje. Sistem linearnih jednačina koji se tako formira se onda rešava bilo nekom od direktnih metoda, bilo primenom iterativnih metoda, koje su predmet sledeće glave.

Efikasnost elektromagnetskog modelovanja zasnovanog na površinskim jednačinama se može znatno povećati korišćenjem funkcija bazisa višeg reda, koje su ukratko razmatrane na kraju ove glave, kao i osnove geometrijskog modelovanja specifičnog za površinske formulacije. Posebna vrsta funkcija bazisa višeg reda, maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa će biti detaljno prezentovane u sedmoj glavi. Njihovom primenom se mogu prevazići neke od specifičnosti upotrebe jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa višeg reda u pogledu veoma visokog kondicionog broja za više redove aproksimacije, što je takođe demonstrirano na numeričkim primerima u istoj glavi.

3. Iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina

Primenom MoM-a na sistem površinskih integralnih jednačina dobija se sistem linearnih jednačina sa matricom sistema koja je gusto popunjena matrica sa kompleksnim koeficijentima. Takav sistem se uvek može rešavati direktnim metodama, dok pod određenim uslovima iterativne metode mogu imati izvesne prednosti u odnosu na direktne. U ovoj glavi će biti predstavljeni glavni predstavnici osnovnih klasa iterativnih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina, imajući u vidu specifičnosti koje su rezultat usvojenog tipa testiranja (Galerkinovo) i formulacija koje se koriste (EFIE i PMCHWT). Najpre će biti prikazane stacionarne, a zatim nestacionarne linearne iterativne metode. Kao tipični predstavnici nestacionarnih linearnih iterativnih metoda biće prikazane dve najčešće korišćene metode. Zatim će biti razmatran izbor najpogodnije metode za rešavanje sistema koji se dobijaju uz pretpostavke koje su u ovom radu usvojene. Na kraju će biti dat numerički primer koji ilustruje numerička svojstva MoM matrica uz primenu funkcija bazisa višeg reda.

3.1. Linearne iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina

Jedan od osnovnih problema numeričke matematike je rešavanje sistema linearnih jednačina [94], odnosno sistema u formi:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (3.1)$$

gde je \mathbf{A} (kvadratna) matrica sistema (reda n), i njeni elementi su koeficijenti sistema linearnih jednačina, vektor \mathbf{b} je vektor desne strane sistema, dok je vektor \mathbf{x} vektor nepoznatih koje treba odrediti tako da važi (3.1).

Sa stanovišta teorijske matematike rešavanje sistema (3.1) je gotovo trivijalan problem linearne algebre i dato je formulom $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, u kojoj je \mathbf{A}^{-1} inverzna matrica matrice \mathbf{A} . Pritom postoje i eksplicitne formule za elemente inverzne matrice \mathbf{A}^{-1} i rešenje \mathbf{x} za sisteme niskog reda ($n = 2, 3$). Za sisteme proizvoljnog

reda do rešenja \mathbf{x} se dolazi tzv. direktnim metodama korišćenjem unapred poznatog broja elementarnih operacija (pri čemu se pod elementarnom operacijom podrazumeva jedno množenje i jedno sabiranje u paru). Tako se, na primer, primenom Gausove metode eliminacije ili LU faktorizacijom sistema, do rešenja dolazi korišćenjem $\sim n^3/3$ operacija. Zbog konačne aritmetike kod računara čak ni rešenje direktnom metodom se ne može izračunati apsolutno tačno. Takođe, ukoliko se radi o praktičnom inženjerskom problemu i neka dovoljno dobra aproksimacija rešenja, $\tilde{\mathbf{x}}$, može biti sasvim zadovoljavajuća, naročito u slučajevima kada su elementi matrice sistema \mathbf{A} i vektora \mathbf{b} rezultat bilo merenja određenih fizičkih veličina mernim instrumentima bilo numeričkih izračunavanja (recimo integrala).

U praksi smo svesni da pored ograničenja po pitanju numeričke tačnosti, računari imaju ograničenja još i u aspektima raspoloživog memorijskog prostora i vremena izvršavanja. Velika većina iterativnih metoda zahtevaju računanje ostatka (reziduala) u svakoj iteraciji što, za slučaj kompleksnih i punih MoM matrica koje se razmatraju u ovom radu, zahteva n^2 elementarnih operacija. U slučaju nekih metoda, kao što je na primer metoda konjugovanih gradijenata korišćena u ovom radu, u svakoj iteraciji se koristi $2n^2$ elementarnih operacija. Tada iterativne metode imaju prednost u odnosu na direktne samo ukoliko je broj iteracija za zadatau tačnost ili nezavisan od n ili se skalira sublinearno sa porastom n . Posebno, metoda konjugovanih gradijenata korišćena u ovom radu može imati prednost nad direktnom metodom, samo ako je broj iteracija potreban za rešavanje sistema linearnih jednačina za zadatau tačnost manji od $n/6$. Veličina sistema koji se rešava, n , ujedno predstavlja i maksimalan broj iteracija (barem sa teoretskog stanovišta) za brojne iterativne metode u primeni.

U osnovi, iterativne metode imaju za cilj nalaženje *dovoljno dobre aproksimacije* $\tilde{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ konstruisanjem niza $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ vektora aproksimacija sa sledećim osobinama:

- u svakom koraku k je formula za računanje $\mathbf{x}^{(k)}$ (relativno) jednostavna, pri čemu se matrica \mathbf{A} koristi u nekoj od formi: \mathbf{A}, \mathbf{A}^H

(konjugovano-transponovana matrica, $\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T$), ili neki deo od \mathbf{A} (dijagonalni deo, donji ili gornji trougaoni deo ili slično), a sve u kontekstu što efikasnijeg računanja proizvoda matrice i vektora;

- $\mathbf{x}^{(k)}$ teži tačnom rešenju, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, i za neko k , po mogućstvu $k \ll n$, $\mathbf{x}^{(k)}$ je prihvatljiva aproksimacija za \mathbf{x} .

Kako tačno rešenje sistema nije unapred poznato, neophodno je uvođenje adekvatnog kriterijuma zaustavljanja iterativnog procesa kako bi bilo moguće pratiti konvergenciju iteracija. Rešenja pojedinačnih iteracija uvek predstavljaju aproksimaciju tačnog rešenja.

Iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina se razmatraju u obliku:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ \vdots & \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{f}_{k+1}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-m)}, \mathbf{A}, \mathbf{b}), \quad k \geq m \end{aligned} \tag{3.2}$$

gde su \mathbf{f}_{k+1} i $\mathbf{x}^{(m)}, \dots, \mathbf{x}^{(0)}$ date funkcije i vektori, respektivno. Broj prethodnih koraka od kojih trenutna iteracija zavisi, m , se naziva redom metode. Ukoliko su funkcije \mathbf{f}_{k+1} nezavisne od indeksa iteracije, k , metoda je stacionarna, dok je u suprotnom nestacionarna. Kod linearnih iterativnih metoda \mathbf{f}_{k+1} imaju linearnu zavisnost u odnosu na $\mathbf{x}^{(k)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-m)}$, a u suprotnom se radi o nelinearnim metodama.

3.2. Stacionarne linearne iterativne metode

Osnovne stacionarne linearne iterativne metode se zasnivaju na relaksaciji koordinata, tako što se, počev od polaznog aproksimativnog rešenja, komponente aproksimacije modifikuju, jedna ili više njih, u određenom redosledu, sve do postizanja konvergencije. Svaka od modifikacija, koje se još nazivaju i koracima relaksacije, ima za cilj da poništi jednu ili više komponenta vektora ostatka [45]:

$$\left(\mathbf{r}^{(k+1)}\right)_i = \left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)}\right)_i = 0. \tag{3.3}$$

3.2.1. Jakobijeva metoda

Ukoliko sistem (3.1) napišemo kao:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.4)$$

tada se uslov (3.3) kod Jakobijeve iteracije može izraziti preko [95, 96]:

$$b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - a_{ii}x_i^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.5a)$$

odakle se dobija:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i=1, \dots, n. \quad (3.5b)$$

Polazeći od dekompozicije matrice sistema \mathbf{A} u formi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}, \quad (3.6)$$

gde je \mathbf{D} matrica koja sadrži samo dijagonalne elemente, $-\mathbf{E}$ je striktno donji trougaoni deo i $-\mathbf{F}$ je striktno gornji trougaoni deo matrice \mathbf{A} , relacije (3.5a) i (3.5b) možemo predstaviti u matričnom obliku kao [45]:

$$\mathbf{b} + \mathbf{E}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}, \quad (3.7a)$$

i

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \quad (3.7b)$$

respektivno.

Kod Jakobijeve iteracije se sve komponente ažuriraju odjednom za celu iteraciju samo na osnovu vrednosti iz prethodne iteracije.

3.2.2. Gaus-Zajdelova metoda

Kod Gaus-Zajdelove iteracije nove vrednosti komponenata se koriste odmah po izračunavanju za ažuriranje preostalih komponenata koje tek treba ažurirati u tekućoj iteraciji. Tako imamo, za slučaj ažuriranja komponenti aproksimacije u redosledu od prve do poslednje [45]:

$$b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - a_{ii}x_i^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.8a)$$

odakle se za pojedinačne komponente dobija:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8b)$$

Relacije (3.8a) i (3.8b) se u matricnoj notaciji mogu predstaviti kao:

$$\mathbf{b} + \mathbf{E}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}, \quad (3.9a)$$

i

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{b}, \quad (3.9b)$$

respektivno.

Za suprotan smer ažuriranja komponenti aproksimacije (od poslednje do prve) analogno se dobija:

$$\mathbf{b} + \mathbf{E}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{0}, \quad (3.10a)$$

i

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{E}\mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{D} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.10b)$$

Gaus-Zajdelova metoda i Jakobijeva metode se mogu generalizovati tako da koriste blokove komponentata umesto pojedinačnih komponentata vektora aproksimacije. U tom slučaju se uvode operatori restrikcije (\mathbf{R}_i , za prelaz sa kompletnog vektora aproksimacije na određeni blok komponentata aproksimacije) i prolongacije (\mathbf{R}_i^T , za prelaz sa bloka komponentata aproksimacije na kompletan vektor aproksimacije) [45].

Po analogiji sa blokovskim varijantama Jakobijevog i Gaus-Zajdelovog postupka mogu se definisati aditivni i multiplikativni projekcioni postupci, u zavisnosti od toga da li se nove vrednosti ažuriraju na nivou cele iteracije, ili se vrednosti pojedinačnih blokova komponenti koriste u proračunima odmah po njihovom ažuriranju.

3.2.3. SOR metoda

U svojoj doktorskoj disertaciji *David M. Young* je 1950. godine dao fundamentalne doprinose teoriji klasičnih iterativnih metoda kroz detaljan opis SOR (Successive Over-Relaxation) metode. Upravo u tom periodu je došlo do najznačajnijeg razvoja ovih metoda i to u kontekstu numeričkog rešavanja eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

SOR metoda se zasniva na relaksacionom nizu [45]:

$$x_i^{(k+1)} = \omega x_i^{GS} + (1 - \omega)x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.11)$$

gde je vrednost x_i^{GS} data desnom stranom jednakosti (3.8b), a ω je realan parametar za koji se dokazuje da mora pripadati intervalu $(0, 2)$. U tom slučaju se dobija:

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = \omega b_i - \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + (1 - \omega)a_{ii}x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

odnosno, u matričnoj notaciji:

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega \mathbf{b} + \omega \mathbf{E}\mathbf{x}^{(k+1)} + \omega \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k)} + (1 - \omega)\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k)}, \quad (3.13a)$$

$$(\mathbf{D} - \omega \mathbf{E})\mathbf{x}^{(k+1)} = [\omega \mathbf{F} + (1 - \omega)\mathbf{D}]\mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{b}. \quad (3.13b)$$

Dodavanjem još jednog koraka ažuriranja komponenata, sa opadajućim indeksom ažuriranja (kao kod obrnutog Gaus-Zajdela), dobija se SSOR (Symmetric SOR) metoda [45]:

$$(\mathbf{D} - \omega \mathbf{E})\mathbf{x}^{(k+1/2)} = [\omega \mathbf{F} + (1 - \omega)\mathbf{D}]\mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{b}, \quad (3.14a)$$

$$(\mathbf{D} - \omega \mathbf{F})\mathbf{x}^{(k+1)} = [\omega \mathbf{E} + (1 - \omega)\mathbf{D}]\mathbf{x}^{(k+1/2)} + \omega \mathbf{b}. \quad (3.14b)$$

Analogno SOR-u, koji koristi desnu stranu jednakosti (3.8b), na osnovu relaksacionog niza $x_i^{(k+1)} = \omega x_i^J + (1 - \omega)x_i^{(k)}$, gde je x_i^J desna strana jednakosti (3.5b), dobija se JOR (Jacobi Over-Relaxation) metoda [97].

3.2.4. Konvergencija stacionarnih linearnih iterativnih metoda prvog reda

Stacionarne linearne iterativne metode prvog reda imaju formu [98]:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\varphi}, \quad k \geq 0, \quad (3.15)$$

gde je \mathbf{B} matrica iteracija, $\boldsymbol{\varphi}$ vektor koji se dobija na osnovu vektora desne strane sistema \mathbf{b} , i pritom je $\mathbf{x}^{(0)}$ unapred dat.

Pokazuje se da (3.15) konvergira rešenju sistema (3.1) po proizvoljnoj normi i za proizvoljnu početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)}$ ako i samo ako je spektralni radijus matrice iteracija \mathbf{B} striktno manji od 1, odnosno:

$$\rho(\mathbf{B}) \stackrel{def}{=} \max_j |\lambda_j| < 1, \quad (3.16)$$

gde su λ_j , $j=1,\dots,n$, sopstvene vrednosti matrice \mathbf{B} .

U skladu sa tim, predstavljene stacionarne linearne iterativne metode su, iako izuzetno jednostavne, efikasne za rešavanja samo određenih klasa problema, tako da danas nalaze primenu skoro isključivo samo kao komponente sofisticiranijih metoda.

3.2.5. Veza sa stacionarnom Ričardsonovom metodom

Matrica \mathbf{A} se može izraziti u obliku $\mathbf{A}=\mathbf{M}-\mathbf{N}$ (takozvano aditivno rastavljanje matrice \mathbf{A}), pri čemu matrica \mathbf{M} nije singularna. Ako je početno rešenje $\mathbf{x}^{(0)}$ dato, onda se rešenje u k -toj iteraciji $\mathbf{x}^{(k)}$, $k \geq 1$, na osnovu (3.1) može naći rešavanjem sistema:

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} = (\mathbf{M}-\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k \geq 0. \quad (3.17)$$

Na osnovu (3.17) $\mathbf{x}^{(k+1)}$ se može izraziti kao:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}^{(k)}, \quad k \geq 0, \quad (3.18)$$

gde je $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$ vektor ostatka u iteraciji k . Relacija (3.18) predstavlja stacionarnu Ričardsonovu metodu sa vrednošću relaksacionog parametra $\alpha = 1$.

Za proizvoljnu vrednost relaksacionog parametra stacionarna Ričardsonova metoda je predstavljena relacijom:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}^{(k)}, \quad k \geq 0. \quad (3.19)$$

3.3. Nestacionarne linearne iterativne metode

Kada koeficijent α u (3.19) zavisi od iteracije do iteracije dobija se nestacionarna Ričardsonova metoda:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}^{(k)}, \quad k \geq 0. \quad (3.20)$$

Nestacionarne linearne iterativne metode se u osnovi zasnivaju na nekom postupku projekcije i kao takve se mogu posmatrati u kontekstu Krilovljevih potprostora. Kako se za rešavanje sistema jednačina mogu koristiti i numeričke metode minimizacije odgovarajućeg funkcionala [99], to će najpre biti razmatrane gradijentne metode.

3.3.1. Gradijentne metode

Metode minimizacije su po svojoj prirodi iterativne i većina njih se može predstaviti iterativnom formulom oblika [99]:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.21)$$

gde je $t^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}$ popravka u k -tom koraku, dok $\mathbf{p}^{(k)}$ definiše pravac, a $t^{(k)}$ veličinu popravke (rastojanje). Veličina popravke se bira tako da bude zadovoljeno:

$$F(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leq F(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.22)$$

tačnije, da funkcional F ima minimum na pravcu $\mathbf{p}^{(k)}$ u tački $\mathbf{x}^{(k+1)}$.

Jedna od osnovnih gradijentnih metoda je metoda najbržeg spusta.

3.3.1.1. Metoda najbržeg spusta

Metoda najbržeg spusta (steepest descent) se zasniva na minimizaciji funkcionala [99]:

$$F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r}^H \mathbf{r}. \quad (3.23)$$

Pritom se za pravac uzima pravac (negativnog) gradijenta $F(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{p}^{(k)} = -C \nabla F(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (3.24)$$

gde je C odgovarajuća konstanta, a nabra operator (∇) ovde predstavlja vektorski diferencijalni operator u n -dimenzionalnom prostoru. Primenom ∇ operatora na (3.23) se dobija:

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{A}^H \mathbf{r}^{(k)}. \quad (3.25)$$

Rastojanje, $t^{(k)}$, se dobija minimizacijom funkcionala:

$$F(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle. \quad (3.26)$$

Drugim rečima, zahteva se [100]:

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^{(k+1)})}{\partial a^{(k)}} = 0, \quad \frac{\partial F(\mathbf{x}^{(k+1)})}{\partial b^{(k)}} = 0, \quad (3.27)$$

gde su $a^{(k)}$ i $b^{(k)}$ realni i imaginarni deo $t^{(k)}$, respektivno.

Kako je:

$$F(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - t^{(k)} \langle \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - t^{(k)*} \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)} \rangle + |t^{(k)}|^2 \langle \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)} \rangle, \quad (3.28)$$

primenjujući (3.27) na (3.28) dobija se:

$$t^{(k)} = a^{(k)} + jb^{(k)} = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)} \rangle} = \frac{\|\mathbf{A}^H \mathbf{r}^{(k)}\|^2}{\|\mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)}\|^2}. \quad (3.29)$$

3.3.1.2. Metoda konjugovanih gradijenata (Conjugate Gradient - CG)

Jedan od osnovnih oblika metode konjugovanih gradijenata se može izvesti polazeći od minimizacije funkcionala (3.23). Tokom iterativnog postupka cilj je, polazeći od aproksimacije $\mathbf{x}^{(k)}$ i pomerajući se duž pravca $\mathbf{p}^{(k)}$ za rastojanje $t^{(k)}$ stići do aproksimacije $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Rastojanje $t^{(k)}$ se bira tako da se minimizira $F(\mathbf{x}^{(k+1)})$. Kako je $F(\mathbf{x}^{(k+1)})$ kvadratna funkcija, ona ima samo jednu stacionarnu tačku i to je upravo globalni minimum koji se traži. Kao i kod metode najbržeg spusta, $t^{(k)}$ se određuje po formuli (3.29).

U zavisnosti od polaznih pretpostavki vezanih za osobine matrice sistema, mogu se izvesti različite varijante CG metode [100, 101]. Ovde će biti prikazana varijanta CG metode koja je korišćena u ovom radu i koja se primenjuje na kompleksne matrice, a pritom ne podrazumeva simetričnost matrice sistema.

Ostaci se generišu rekurzivno kao:

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - t^{(k)} \mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)}. \quad (3.30)$$

Na osnovu (3.29) i (3.30) imamo:

$$\langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)} \rangle = 0. \quad (3.31)$$

Pravci $\mathbf{p}^{(k)}$ se takođe generišu rekurzivno, preko gradijenta $\mathbf{r}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)})$ kao:

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{A}^H \mathbf{r}^{(k+1)} + q^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}. \quad (3.32)$$

Konstanta $q^{(k)}$ se kod CG metode bira tako da su vektori $\mathbf{p}^{(k+1)}$ \mathbf{A} -ortogonalni sa prethodnim vektorima, u odnosu na unutrašnji proizvod:

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{A}\mathbf{p}^{(j)} \rangle = 0, \quad i \neq j. \quad (3.33)$$

Uslov (3.33) obezbeđuje da će metoda iskonvergirati u konačnom broju koraka, uz zanemarivanje greške pri zaokruživanju proizvoda $\mathbf{A}\mathbf{p}$ ili $\mathbf{A}^H \mathbf{r}$ i propagaciju greške kroz rekurzivni proračun $\mathbf{r}^{(k)}$ i $\mathbf{p}^{(k)}$.

Koristeći (3.32) i (3.33) za $q^{(k)}$ se dobija:

$$q^{(k)} = \frac{\|\mathbf{A}^H \mathbf{r}^{(k+1)}\|^2}{\|\mathbf{A}^H \mathbf{r}^{(k)}\|^2}. \quad (3.34)$$

Na osnovu (3.31) i (3.32) važi:

$$\langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{A} \mathbf{A}^H \mathbf{r}^{(k)} \rangle = 0. \quad (3.35)$$

Funkcional $F(\mathbf{x})$ se smanjuje u svakoj iteraciji:

$$F(\mathbf{x}^{(k)}) - F(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \frac{|\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)} \rangle|^2}{\langle \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)} \rangle} = |t^{(k)}|^2 \langle \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)} \rangle. \quad (3.36)$$

Kao i u (3.21) $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$. Što se tiče početnih uslova, najčešće se usvaja nulta početna aproksimacija, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, dok je $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{A}^H \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{A}^H (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(0)})$. U opštem slučaju $\mathbf{x}^{(0)}$ može biti proizvoljan vektor.

Gornja granica greške aproksimativnog rešenja se procenjuje, za slučaj simetričnih pozitivno definitnih (Symmetric Positive Definite - SPD) matrica, preko [45]:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}, \quad (3.37)$$

gde je $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} = \langle \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$ \mathbf{A} -norma, što ujedno objašnjava i pojavu superlinearne konvergencije za male vrednosti kondicionog broja κ matrice \mathbf{A} .

3.3.2. Metode Krilovljevih potprostora

Većina postojećih iterativnih metoda koje se upotrebljavaju za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina se na ovaj ili onaj način zasnivaju na nekom postupku projekcije. Sam postupak projekcije predstavlja kanoničan način ekstrakcije aproksimativnog rešenja na osnovu određenog potprostora. Ako je \mathbf{K} potprostor kandidata aproksimacije (ili potprostor pretrage) i njegova dimenzija je m , tada se, u opštem slučaju, uvođenjem m ograničenja generiše tražena aproksimacija. Ova ograničenja se tipično zasnivaju na uvođenju m (nezavisnih) uslova ortogonalnosti. Tako se za vektor ostatka $\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}$ zahteva da bude ortogonalan sa

m linearno nezavisnih vektora, čime se definiše potprostor \mathbf{L} dimenzije m koji se naziva potprostorom ograničenja ili levim potprostorom. Uslov ortogonalnosti se za slučaja kada su potprostori \mathbf{L} i \mathbf{K} identični naziva Galerkinovim uslovom, dok se opštiji uslov naziva Petrov-Galerkinovim uslovom.

Projekcione metode se dele na dve široke klase: ortogonalne projekcione metode i kose projekcione metode. Kod ortogonalnih projekcionih metoda potprostor \mathbf{L} je identičan potprostoru \mathbf{K} , dok se kod kosih projekcionih metoda ovi potprostori razlikuju i \mathbf{L} može biti potpuno nevezan sa \mathbf{K} .

Neka je $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ $n \times m$ matrica čiji kolona-vektori čine bazis potprostora \mathbf{K} , i neka je $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$ $n \times m$ matrica čiji kolona-vektori čine bazis potprostora \mathbf{L} . Ako se aproksimativno rešenje usvoji u obliku $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}\mathbf{y}$, tada uslov ortogonalnosti rezultuje sistemom jednačina za vektor \mathbf{y} u formi $\mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{y} = \mathbf{W}^H \mathbf{r}^{(0)}$. Ukoliko $m \times m$ matrica $\mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{V}$ nije singularna, za aproksimativno rešenje imamo sledeći izraz [45]:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}(\mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^H \mathbf{r}^{(0)}. \quad (3.38)$$

Jedno-dimenzioni projekcioni postupci se dobijaju usvajanjem $\mathbf{K} = \text{span}\{\mathbf{v}\}$ i $\mathbf{L} = \text{span}\{\mathbf{w}\}$, gde su \mathbf{v} i \mathbf{w} dati vektori. U tom slučaju nova aproksimacija je u svakoj iteraciji data sa $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \alpha_i \mathbf{v}$, gde se iz Petrov-Galerkinovog uslova dobija:

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{A} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}. \quad (3.39)$$

Metode Krilovljevih potprostora se zasnivaju na projekcionim metodama, kako ortogonalnim, tako i kosim, nad Krilovljevim potprostorima koji obuhvataju vektore oblika $p(\mathbf{A})\mathbf{v}$, gde je p polinom, i to takav da je $p(\mathbf{A})\mathbf{b}$ dobra aproksimacija za $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. U zavisnosti od forme u kojoj se koristi matrica \mathbf{A} , razlikuju se metode zasnovane na Arnoldijevoj ortogonalizaciji i metode zasnovane na Lanczosovoj bi-ortogonalizaciji.

Neka je $\mathbf{x}^{(0)}$ proizvoljna početna aproksimacija rešenja sistema. Tada je metoda Krilovljevih prostora metoda koja za potprostor \mathbf{K}_m ima Krilovljev potprostor

$\mathbf{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{r}^{(0)}) = \text{span}\{\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{r}^{(0)}\}$, gde je $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$. Posmatrano iz ugla teorije aproksimacije, aproksimacije dobijene metodama Krilovljevih prostora su oblika $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \approx \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)} + q_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)}$, gde je q_{m-1} polinom stepena $m-1$ [45]. Za $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ je $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \approx q_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{b}$. Iako svi ovi postupci rezultuju istom vrstom polinomijalnih aproksimacija, ograničenja koja se usvajaju za svaki od njih imaju značajan uticaj na iterativne postupke koji se dobijaju. Dva glavna izbora za \mathbf{L}_m su $\mathbf{L}_m = \mathbf{K}_m$ i varijacija sa minimalnim ostatkom $\mathbf{L}_m = \mathbf{A}\mathbf{K}_m$. Druga klasa metoda se zasniva na Krilovljevim metodama vezanim za \mathbf{A}^H , odnosno $\mathbf{L}_m = \mathbf{K}_m(\mathbf{A}^H, \mathbf{r}^{(0)})$.

Dimenzija potprostora aproksimacija se za Krilovljev potprostor:

$$\mathbf{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{v}) \equiv \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{v}\}, \quad (3.40)$$

povećava za jedan u svakom koraku procesa aproksimacije. \mathbf{K}_m je potprostor svih vektora u C^n koji se mogu izraziti kao $\mathbf{x} = p(\mathbf{A})\mathbf{v}$, gde je p polinom čiji stepen nije veći od $m-1$.

Kao glavni predstavnik metoda Krilovljevih potprostora ovde će biti prikazana metoda generalizovanog minimalnog ostatka.

3.3.2.1. GMRES

Generalizovana metoda minimalnog ostatka (Generalized Minimum Residual Method - GMRES) je projekciona metoda sa $\mathbf{K} = \mathbf{K}_m$ i $\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{K}_m$, gde je \mathbf{K}_m m -ti Krilovljev potprostor za $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}^{(0)} / \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2$. Na ovaj način se minimizira norma ostatka nad svim vektorima iz $\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{K}_m$. Za potrebe formiranja ortonormiranog bazisa koristi se Arnoldijeva metoda [45].

3.3.2.1.1. Arnoldijeva metoda

Arnoldijeva metoda je metoda ortogonalne projekcije na \mathbf{K}_m za opšte matrice koje nisu Hermitske i njome se formira ortogonalni bazis Krilovljevog potprostora $\mathbf{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{v}_1)$.

Neka je \mathbf{v}_1 vektor, takav da važi $\|\mathbf{v}_1\|_2 = 1$. Tada imamo, za $j = 1, 2, \dots, m$:

$$h_{ij} = \langle \mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, j, \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} \mathbf{v}_i, \quad (3.41b)$$

$$h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}_j\|_2, \quad (3.41c)$$

$$\mathbf{v}_{j+1} = \frac{\mathbf{w}_j}{\|\mathbf{w}_j\|_2}. \quad (3.41d)$$

U svakom koraku, $j = 1, 2, \dots, m$, prethodni vektor \mathbf{v}_j se množi matricom \mathbf{A} , i rezultat ortonormalizuje svim prethodnim vektorima \mathbf{v}_i , $i = 1, 2, \dots, j$ standardnim Gram-Šmitovim postupkom. U praksi se često koriste i modifikovani Gram-Šmitov postupak ili Householderov algoritam umesto standardnog Gram-Šmitovog postupka.

Ako je $\mathbf{V}_m = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ $n \times m$ matrica, čiji su kolona-vektori vektori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, $\bar{\mathbf{H}}_m$ $(m+1) \times m$ matrica, čiji su nenulti elementi jednaki h_{ij} , a \mathbf{H}_m (gornja) Hessenbergova matrica dobijena uklanjanjem poslednje vrste iz $\bar{\mathbf{H}}_m$, tada važi [45]:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_m \mathbf{H}_m + \mathbf{w}_m \mathbf{e}_m^T = \mathbf{V}_{m+1} \bar{\mathbf{H}}_m, \quad (3.42a)$$

$$\mathbf{V}_m^H \mathbf{A}\mathbf{V}_m = \mathbf{H}_m, \quad (3.42b)$$

gde je $\mathbf{e}_m = [0, \dots, 0, 1]^T$ $m \times 1$ matrica-kolona sa jedinim nenultim jediničnim elementom u poslednjoj vrsti.

3.3.2.1.2. Osnovni elementi GMRES-a

Svaki vektor \mathbf{x} nad potprostorom $\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{K}_m$ može se izraziti kao $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}_m \mathbf{y}$ gde je \mathbf{y} vektor dimenzije m . Ukoliko se definiše [45]:

$$J(\mathbf{y}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}_m \mathbf{y})\|_2, \quad (3.43)$$

tada imamo, na osnovu (3.42a):

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}_m \mathbf{y}) = \mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{A}\mathbf{V}_m \mathbf{y} = \beta \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{m+1} \bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y} = \mathbf{V}_{m+1} (\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}). \quad (3.44)$$

Kako su vektori-kolone matrice \mathbf{V}_{m+1} ortonormalni, imamo:

$$J(\mathbf{y}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}_m \mathbf{y})\|_2 = \|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|_2. \quad (3.45)$$

GMRES aproksimacija daje jedinstven vektor nad $\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{K}_m$ takav da se minimizira (3.43). Tako je $\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{V}_m \mathbf{y}_m$, gde \mathbf{y}_m minimizira funkciju $J(\mathbf{y}) = \|\beta \mathbf{e}_1 - \overline{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|_2$. Nalaženje \mathbf{y}_m se svodi na rešavanje problema $(m+1) \times m$ najmanjih kvadrata, gde je m obično malo, i u praksi se zasniva na transformaciji gornje Hesenbergove u gornju trougaonu matricu, preko Givensovih rotacija.

Sa praktičnog stanovišta, sa porastom m , obim proračuna raste kao $O(m^2 n)$ zbog Gram-Šmitove ortogonalizacije, a memorijsko zauzeće kao $O(mn)$, tako da za velike vrednosti n postoji ograničenje za m . Ovaj problem se rešava periodičnim ponovnim pokretanjem algoritma, gde se poslednje nađeno aproksimativno rešenje koristi kao početno u novom ciklusu algoritma, odnosno uzima se $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(m)}$, i, za ovu novu vrednost, $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$, $\beta = \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2$ i $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}^{(0)}/\beta$.

Takođe se može primeniti i nepotpuna ortogonalizacija, gde se insistira na ortogonalnosti novogenerisanih vektora sa najviše k prethodno generisanih.

3.3.2.1.3. Konvergencija GMRES-a

Kako se u m -toj iteraciji minimizira ostatak nad \mathbf{K}_m , i svaki naredni potprostor sadrži prethodni, ostatak opada monotono i važi [45]:

$$\|\mathbf{r}^{(m)}\| \leq \inf_{p \in P_m} \|p(\mathbf{A})\| \leq \kappa_2(\mathbf{V}) \inf_{p \in P_m} \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |p(\lambda)| \|\mathbf{r}^{(0)}\|, \quad (3.46)$$

gde P_m označava skup polinoma stepena ne većeg od m za koje važi $p(0)=1$, \mathbf{V} matricu koja se određuje tokom spektralne dekompozicije matrice \mathbf{A} , κ_2 označava kondicioni broj po normi-2, i $\sigma(\mathbf{A})$ je spektar matrice \mathbf{A} . Odavde vidimo da do brze konvergencije nastupa kada je matrica \mathbf{A} bliska normalnoj i njeni karakteristični koreni (sopstvene vrednosti) su grupisani i što udaljeniji od koordinatnog početka.

3.4. Izbor optimalnog iterativnog postupka za rešavanje sistema datog MoM matricom dobijenom na osnovu SIE

Za potrebe rešavanja sistema jednačina dobivenih na osnovu površinskih integralnih jednačina primenom metode momenata dominantno su korišćene

metode CG tipa [60]-[62], [84] sa jedne i GMRES [102]-[104] sa druge strane. Iz ovih radova se ne može dati prednost u pogledu efikasnosti ni jednoj od ove dve metode. Kako je CG daleko jednostavniji za realizaciju od GMRES-a u ovom radu je korišćena CG metoda.

3.5. Kriterijum za okončanje iterativnog postupka i uslovljenost matrice sistema linearnih jednačina

Iterativnim postupkom se generiše niz aproksimacija rešenja za određenu klasu problema. Svaki algoritam iterativnog postupka uključuje i kriterijum za okončanje (zaustavljanje). Ako iteracioni niz konvergira traženom rešenju \mathbf{x} , $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$, kaže se da iteracioni proces konvergira ka traženom rešenju \mathbf{x} jednačine (3.1). U slučaju konvergentnog iterativnog procesa \mathbf{x} predstavlja tačku nagomilavanja iterativnog niza $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, odnosno za proizvoljno malo ε se može naći takvo $K(\varepsilon)$ da važi $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$, $\forall k > K(\varepsilon)$. Kako \mathbf{x} nije unapred poznato, kao izlazni kriterijum se može koristiti uslov $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon$, odnosno:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)} + \Delta\|} < \delta, \quad (3.47)$$

kada razlika između sukcesivnih iteracija opadne ispod određene tolerancije, δ , gde je Δ mali broj (može se uzeti $\Delta = \delta$) čijim se dodavanjem na $\mathbf{x}^{(k+1)}$ tretira potencijalna situacija takozvanog *overflow*-a kad je tačna vrednost 0.

Kriterijum koji se najčešće koristi je $\|f(\mathbf{x}^{(k)})\| < \varepsilon_f$, gde ćemo ovde koristiti uslov da ostatak $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$ opadne ispod određene tolerancije, odnosno da važi:

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2}{\|\mathbf{r}^{(0)}\|^2} < \tau. \quad (3.48)$$

Kako ovaj kriterijum zavisi od početne aproksimacije, $\mathbf{x}^{(0)}$, i za dobru početnu aproksimaciju može rezultovati viškom operacija, odnosno nezadovoljavajućom aproksimacijom $\mathbf{x}^{(k)}$ za veliku vrednost inicijalnog ostatka, to je bolje koristiti

uslov $\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2 / \|\mathbf{b}\|^2 < \tau$. Veličinu τ , koja predstavlja kriterijum za okončanje iterativnog postupka posmatran preko normalizovanog kvadrata norme ostatka, ovde ćemo nazivati **relativnim ostatkom** pri rešavanju sistema (3.1).

U nekim slučajevima se koristi kombinacija uslova (3.47) i (3.48). Ukoliko se ne nađe zadovoljavajuća aproksimacija ni posle zadatog maksimalnog broja iteracija, iterativni postupak se može ponoviti sa drugačijom početnom aproksimacijom.

Uslovljenost matrice sistema \mathbf{A} sistema linearnih jednačina $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se definiše preko kondicionog broja i nevezana je za algoritam koji se koristi za rešavanje sistema ili preciznost operacija i greške zaokruživanja. Grubo, kondicioni broj oslikava koliko će se promeniti rešenje \mathbf{x} za datu promenu vektora slobodnih članova \mathbf{b} . Tako, za veliku vrednost kondicionog broja, čak i mala greška u \mathbf{b} može rezultovati velikom greškom u \mathbf{x} , dok se za malu vrednost kondicionog broja greška u \mathbf{x} neće biti mnogo veća od greške u \mathbf{b} .

Kondicioni broj matrice \mathbf{A} se definiše kao maksimalni odnos relativne greške rešenja \mathbf{x} i relativne greške \mathbf{b} . Ukoliko je \mathbf{e} greška za \mathbf{b} , greška rešenja, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, će biti $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}$. Odnos relativne greške rešenja i relativne greške \mathbf{b} je:

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}\| / \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{e}\| / \|\mathbf{b}\|}, \quad (3.49)$$

što se jednostavno transformiše u $(\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}\| / \|\mathbf{e}\|) \cdot (\|\mathbf{b}\| / \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|)$.

Maksimalna vrednost je kondicioni broj matrice, i za regularnu matricu je to skalar:

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|, \quad (3.50)$$

gde je $\|\mathbf{A}\|$ norma matrice \mathbf{A} indukovana nekom vektorskom normom [99]. Po definiciji je za sigularnu matricu $\text{cond}(\mathbf{A}) = \infty$. Za proizvoljan skalar α važi:

$$\text{cond}(\alpha\mathbf{A}) = \text{cond}(\mathbf{A}), \quad (3.51)$$

dok je za jediničnu matricu \mathbf{I} :

$$\text{cond}(\mathbf{I}) = \|\mathbf{I}\| \cdot \|\mathbf{I}\| = 1. \quad (3.52)$$

Za proizvoljnu regularnu matricu važi:

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{I}\| = 1, \quad (3.53)$$

tako da imamo $1 \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \leq \infty$ i matrica je lošije uslovljena što je $\text{cond}(\mathbf{A})$ veće.

U ovom radu će biti korišćena norma-2 ($\|\cdot\|_2$), za koju je:

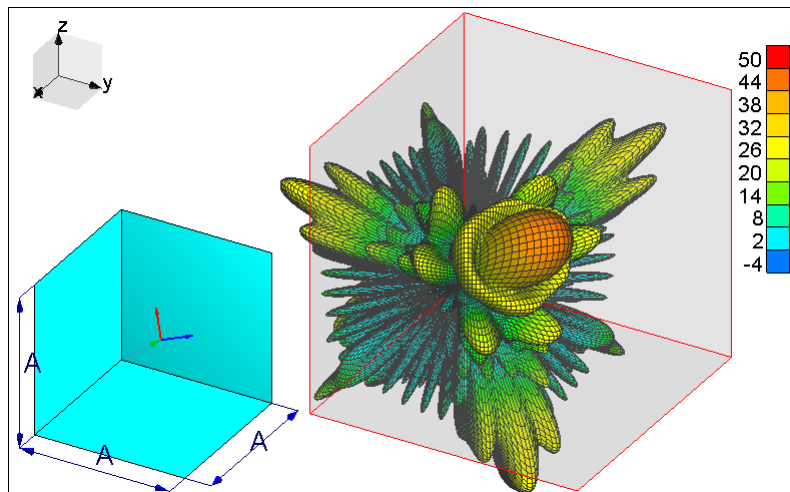
$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})}, \quad (3.54)$$

gde su $\sigma_{\max}(\mathbf{A})$ i $\sigma_{\min}(\mathbf{A})$ najveća i najmanja singularna vrednost matrice \mathbf{A} , respektivno.

U najvećem broju slučajeva smanjenje kondicionog broja matrice sistema vodi ka smanjenju broja iteracija iterativnog postupka izabranog za rešavanje sistema linearnih jednačina sa zadatom tačnošću.

3.6. Numerički primer: Kondicioni broj i broj iteracija modela triedarnog ugaonog reflektora

Posmatrajmo model triedarnog ugaonog reflektora, sačinjenog od kvadratnih metalnih ploča stranica $A = 6\lambda$, pobuđenog kružno polarizovanim ravnim talasom iz pravca $\varphi = 45^\circ$ i $\theta = 54,7356^\circ$, kao što je prikazano u umetku Slike 3.1.



Slika 3.1 Bistatički RCS, σ/λ^2 , triedarnog ugaonog reflektora stranica $A = 6\lambda$, pobuđenog kružno polarizovanim ravnim talasom iz pravca $\varphi = 45^\circ$ i $\theta = 54,7356^\circ$, kao što je prikazano u umetku. (Maksimalni RCS je $\sigma/\lambda^2 = 45,4$ dB.)

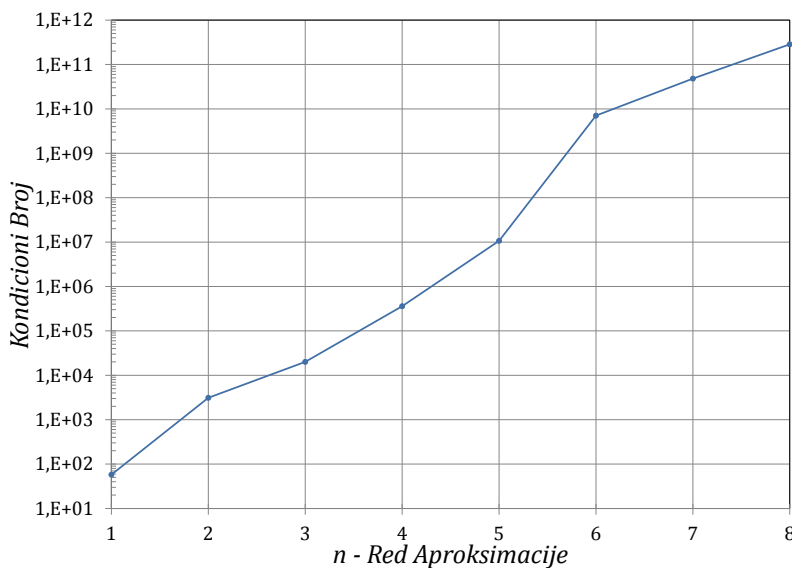
Analiza rasejača je izvršena MoM-om Galerkinovog tipa primenjenim na integralnu jednačinu električnog polja (EFIE), korišćenjem jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa višeg reda (HOBFs) i različitih redova

aproksimacije. U Tabeli 3.1 su date veličine elemenata izražene u talasnim dužinama, ukupan broj elemenata i broj nepoznatih za različite redove aproksimacija. Matrična jednačina je rešavana iterativnom CG metodom (datom u poglavlju 3.3.1.2) sa relativnim ostatkom od 10^{-4} . Za različite redove aproksimacija se dobijaju skoro identični rezultati za RCS (*Radar Cross Section*). Na Slici 3.1 je prikazan RCS normalizovan kvadratom talasne dužine za red aproksimacije $n = 4$. (Maksimalni RCS je $\sigma/\lambda^2 = 45,4$ dB.)

Tabela 3.1 Veličina elemenata izražena u talasnim dužinama, broj elemenata i broj nepoznatih za različite redove aproksimacije pri modelovanju triedarnog ugaonog reflektora prikazanog na Slici 3.1.

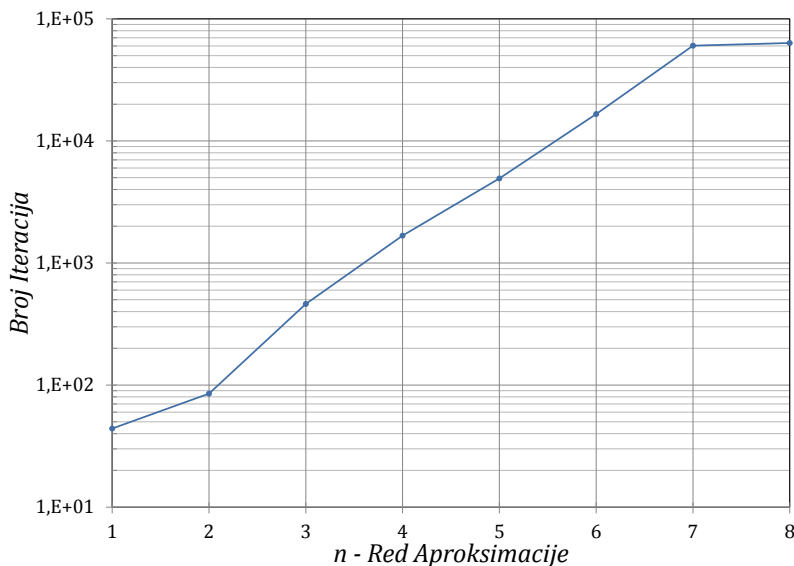
<i>n</i> - red aproksimacije	1	2	3	4	5	6	7	8
Veličina elemenata (λ)	1/8	1/6	2/3	1	5/6	5/3	2	2
Broj elemenata	3x48x48 = 6912	3x18x18 = 972	3x9x9 = 243	3x6x6 = 108	3x5x5 = 75	3x4x4 = 48	3x3x3 = 27	3x3x3 = 27
Broj nepoznatih (<i>N</i>)	13680	7668	4293	3384	3675	3384	2583	3384

Na Slici 3.2 je prikazan kondicioni broj (uz korišćenje norme-2) za različite redove aproksimacije n . Evidentan je drastičan porast kondicionog broja sa porastom reda aproksimacije.



Slika 3.2 Kondicioni broj matrice sistema (norma-2) za različite redove aproksimacije pri MoM/EFIE rešavanju triedarnog ugaonog reflektora uz korišćenje klasičnih funkcija bazisa višeg reda (HOBFs).

Broj iteracija za različite redove aprokcimacije n je prikazan na Slici 3.3. Evidentan je porast broja iteracija za usvojeni relativni ostatak (10^{-4}) sa porastom reda aproksimacije, što je u skladu sa rezultatima za kondicioni broj na Slici 3.2.



Slika 3.3 Broj iteracija za različite redove aproksimacije pri MoM/EFIE rešavanju triedarnog ugaonog reflektora uz korišćenje klasičnih funkcija bazisa višeg reda (HOBFs).

3.7. Rezime

Sistem linearnih jednačina koji se dobija primenom metode momenata na sistem površinskih integralnih jednačina se, pod određenim uslovima, može veoma efikasno rešiti korišćenjem iterativnih metoda. U skladu sa tim, u ovoj glavi su prikazane najpre osnovne stacionarne iterativne metode, koje sporo konvergiraju u slučaju sistema dobijenih primenom MoM-a na površinske integralne jednačine. Zatim su prikazane dve najčešće korišćene nestacionarne iterativne metode: metoda konjugovanih gradijenata i GMRES. Imajući u vidu relativnu jednostavnost primene metode konjugovanih gradijenata njoj je u ovom radu data prednost u odnosu na GMRES. Na kraju su razmatrani kriterijumi za okončanje iterativnog postupka korišćenjem relativnog ostatka, kao i uslovljenost matrice sistema koja se izražava preko kondicionog broja. Kao ilustracija drastičnog porasta kondicionog broja i broja iteracija sa porastom reda aproksimacije dat je primer triedarnog ugaonog reflektora. Na osnovu njega je evidentno da je potrebno koristiti funkcije bazisa višeg reda koje rezultuju manjim kondicionim brojem, kao i odgovarajući

prekondicioner (koji je sastavna komponenta svakog iterativnog postupka),
ukoliko se sistem rešava iterativnom metodom.

4. Standardni postupci za prekondicioniranje sistema linearnih jednačina

U trećoj glavi su predstavljene iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina. Ogroman potencijal iterativnih metoda za rešavanje velikih sistema linearnih jednačina dolazi do izražaja tek uz primenu adekvatnih postupaka prekondicioniranja. U ovoj glavi će prvo biti data opšta teorija prekondicioniranja sistema linearnih jednačina. Zatim će biti prikazane tri glavne grupe postupaka za prekondicioniranje koji se koriste pri iterativnom rešavanju MoM sistema linearnih jednačina dobijenih na osnovu površinskih integralnih jednačina: 1) postupci prekondicioniranja zasnovani na nepotpunoj LU faktorizaciji matrice sistema, 2) postupci koji se baziraju na aproksimaciji inverzne matrice, i 3) postupci zasnovani na dekompoziciji domena. Posebno će u okviru treće grupe biti prikazano prekondicioniranje na osnovu interakcija između bliskih elemenata. Na kraju ove glave će biti dat numerički primer kojim je analiziran uticaj anuliranja elemenata kako same matrice sistema, tako i njene inverzne matrice, na efikasnost prekondicioniranja sistema.

4.1. Opšta teorija prekondicioniranja sistema linearnih jednačina

U poređenju sa direktnim metodama, iterativne metode rešavanja sistema linearnih jednačina pokazuju nedostatak u pogledu robusnosti, što unekoliko smanjuje njihovu zastupljenost u industrijskim primenama i pored veoma zanimljivih osobina, naročito kod veoma velikih sistema jednačina. Efikasnost i robusnost iterativnih metoda se mogu značajno poboljšati korišćenjem adekvatnog postupka **prekondicioniranja** [45]. Prekondicioniranje predstavlja način transformisanja početnog sistema linearnih jednačina u drugi sistem linearnih jednačina koji ima isto rešenje, ali koje se može "lakše" dobiti nekom od iterativnih metoda rešavanja. Pouzdanost iterativnih metoda rešavanja često zavisi više od

kvaliteta samog prekondicionera (transformacije sistema koja se primenjuje) nego li od izbora konkretne metode Krilovljevih potprostora.

Prvi korak pri prekondicioniranju je izbor, odnosno nalaženje matrice prekondicioniranja \mathbf{M} . Ona se može definisati na više različitih načina, ali uvek mora da zadovoljava određeni skup minimalnih uslova. Sa praktičnog stanovišta, najvažniji zahtev je lako rešavanje sistema $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{f}$, jer se u svakom koraku iterativnog postupka javlja potreba za rešavanjem ovakvog sistema. Takođe, matrica \mathbf{M} ne može biti singularna i u određenom smislu treba da aproksimira matricu originalnog sistema \mathbf{A} .

Prekondicioniranje se može klasifikovati ili kao implicitno ili kao eksplicitno. Kod implicitnog prekondicioniranja \mathbf{M} aproksimira \mathbf{A} u određenom smislu dok u slučaju eksplicitnog prekondicioniranja matrica \mathbf{M} direktno aproksimira inverznu matricu matrice sistema \mathbf{A} .

Sama matrica prekondicioniranja \mathbf{M} , ili matrica \mathbf{M}^{-1} , se praktično može primeniti na tri načina. Može se primeniti sa leve strane, kada se govori o levom prekondicioniranju, i u tom slučaju se za implicitno prekondicioniranje dobija prekondicionirani sistem oblika:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}, \quad (4.1a)$$

dok se za levo eksplicitno prekondicioniranje dobija sistem oblika:

$$\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{b}. \quad (4.1b)$$

U slučaju desnog implicitnog prekondicioniranja sistem se može napisati u obliku:

$$\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}, \quad (4.2a)$$

gde se uvodi jednostavna smena promenljivih $\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{x}$, i rešava sistem po vektoru nepoznatih \mathbf{u} . Slično se za desno eksplicitno prekondicioniranje sistem može napisati u obliku:

$$\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{M}\mathbf{u}. \quad (4.2b)$$

Neki put se matrica prekondicioniranja traži u faktorisanom obliku:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_L \mathbf{M}_R, \quad (4.3)$$

gde su matrice \mathbf{M}_L i \mathbf{M}_R tipično trougaone.

U tom slučaju se implicitno prekondicioniranje vrši obostrano, kao:

$$\mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{u}. \quad (4.4a)$$

Slično se za obostrano eksplicitno prekondicioniranje sistem može napisati u obliku:

$$\mathbf{M}_L \mathbf{A} \mathbf{M}_R \mathbf{u} = \mathbf{M}_L \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{M}_R \mathbf{u}. \quad (4.4b)$$

Ovakvo prekondicioniranje se između ostalog koristi u situacijama kada je početni sistem jednačina simetričan i želi se očuvanje simetrije prekondicioniranog sistema.

Matrice prekondicioniranja se mogu konstruisati na razne načine, u nekim slučajevima polazeći od poznavanja fizike problema koji se rešava, dok se veoma često dobijaju samo na osnovu polazne matrice koeficijenata \mathbf{A} . Tako je, recimo, sasvim elementaran oblik eksplicitnog prekondicioniranja množenje svake vrste sistema tako da se dobiju jedinični elementi na dijagonali.

U nastavku će biti opisana grupa postupaka za implicitno prekondicioniranje koja se zasniva na nepotpunoj faktorizaciji matrice \mathbf{A} (Incomplete LU factorization - ILU) [45].

4.2. Prekondicioniranje na bazi nepotpune LU faktorizacije

Za datu matricu \mathbf{A} nepotpunom LU faktorizacijom se računa proređena donja trougaona matrica \mathbf{L} i proređena gornja trougaona matrica \mathbf{U} tako da matrica ostatka $\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{LU}$ zadovoljava određena ograničenja. Kao matrica prekondicioniranja se koristi proizvod matrica \mathbf{L} i \mathbf{U} , tj. $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$. Algoritam nepotpune LU faktorizacije se realizuje kao algoritam potpune LU faktorizacije kod kojeg se u toku izvršenja izostavljanju pojedini elementi van glavne dijagonale.

Šema anuliranja elemenata se može usvojiti na razne načine. Jedan od načina je da se unapred definiše skup P uređenih parova, $P \subset \{(i, j) \mid i \neq j; 1 \leq i, j, \leq n\}$, kojima se određuje koji će elementi u matricama \mathbf{L} i \mathbf{U} imati nultu vrednost. Ovakva nepotpuna LU faktorizacija se označava kao ILU_P faktorizacija.

Za datu šemu anuliranja P faktorizacija ILU_P , koja je zasnovana na IKJ varijanti Gausove eliminacije, se može izvršiti korišćenjem sledećeg algoritma [45]:

Algoritam ILU_P

for $i = 2, \dots, n$

for $k = 1, \dots, i-1$ and if $(i, k) \notin P$

$$a_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$$

for $j = k+1, \dots, n$ and for $(i, j) \notin P$

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$$

end

end

end

Kod proređenih matrica se može usvojiti da je šema anuliranja P identična skupu pozicija nultih elemenata matrice \mathbf{A} . Ovaj poseban oblik ILU_P faktorizacije je poznat kao $ILU(0)$. Ovakva faktorizacija se relativno lako izvršava, ali je u nekim slučajevima takva aproksimacija isuviše gruba i može dovesti čak i do povećanja broja iteracija. Kada $ILU(0)$ ne rezultuje željenom brzinom konvergencije koriste se kompleksniji oblici ILU faktorizacije, koji zahtevaju duže vreme izračunavanja, ali su efikasniji i pouzdaniji u pogledu konvergencije rešenja.

$ILU(p)$ faktorizacije se zasnivaju na konceptu **nivoa popunjenosti**, lev_{ij} koji se definiše na sledeći način [45]:

$$lev_{ij} = \begin{cases} 0 & a_{ij} \neq 0 \vee i = j \\ \infty & \text{drugde} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Pri svakom ažuriranju vrednosti elementa tokom Gausove eliminacije takođe se ažurira i vrednost nivoa popunjenosti trenutnog elementa, preko:

$$lev_{ij} = \min \{ lev_{ij}, lev_{ik} + lev_{kj} + 1 \}. \quad (4.6)$$

Tada se tokom proračuna $ILU(p)$ faktorizacije, pored ažuriranja vrednosti elemenata po vrstama za koje važi $lev(a_{ik}) \leq p$ i uz ažuriranje nivoa popunjenosti elementa pri svakom upisu nove vrednosti, vrši zamena vrednosti nulom za one elemente u vrsti za koje važi $lev(a_{ij}) > p$ na nivou vrste odmah po završetku

proračuna posmatrane vrste. Ekvivalentno, koristi se $P_p = \{(i, j) | lev_{ij} > p\}$ kao šema anuliranja. Ovaj algoritam ima nekoliko nedostataka, počev od nepredvidive količine proračuna za $p > 0$ u zavisnosti od strukture matrice, do činjenice da nivo popunjenosti sam po sebi nije dobar indikator magnitude elementa koji mogu biti anulirani. Tako se može desiti da veliki elementi budu izostavljeni i da greška faktorizacije bude velika. Neke od tehnika koje se koriste ne bi li se kompenzovale odbačene vrednosti se zasnivaju na strategiji **dijagonalne kompenzacije** i osnova su modifikovane ILU (Modified ILU - MILU) faktorizacije [45].

Vođenje računa o konkretnim numeričkim vrednostima elemenata koje se anuliraju tokom nepotpune faktorizacije se realizuje uvođenjem adekvatnog **praga**, odnosno svođenjem na nulu onih elemenata koji zadovoljavaju određeni skup kriterijuma koji uključuju i normu cele vrste. Anuliranje se radi na nivou kompletne vrste, tako da kod **nepotpune faktorizacije sa pragom** (ILUT) ILUT(p, τ) [45] imamo najpre anuliranje pojedinačnih elementa (tokom samog proračuna elemenata vrste) zasnovano na nivou određenom proizvodom norme vrste i praga τ , kome sledi zadržavanje po p najvećih elemenata (ne računajući dijagonalni, koji se uvek zadržava) kako u delu vrste koji se smešta na odgovarajuću poziciju u **L** matrici, tako i u delu vrste koji se smešta na odgovarajuću poziciju u **U** matrici. Često se u implementacijama parametar p odnosi na broj dodatnih elementa koji se zadržavaju u odnosu na broj nenultih elemenata u odgovarajućim delovima vrste originalne matrice. U slučajevima kada se javlja nulti pivot element, ili kada elementi rastu eksponencijalno, ili je dobijena faktorizacija nestabilna (kad $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$ ima veoma veliku normu koja smanjuje konvergenciju ili čak dovodi do divergencije), ILUT algoritam se modifikuje uvođenjem pivotizacije i tada se govori o nepotpunoj LU faktorizaciji sa pragom i pivotizacijom (ILUTP) [45]. U tom slučaju se u dodatnim vektorima permutacije i obrnute permutacije čuvaju redosledi promenljivih. Kako ILUT algoritam ne razmatra simetričnost matrice **A**, i posledično za simetričnu **A** rezultuje matricom $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$ koja nije simetrična, razvijeni su algoritmi koji vode računa o svojstvu simetrije i nazivaju se ILUS [45]. Primenom ILUS na simetričnu matricu dobija se nepotpuna Čoleskijeva faktorizacija.

Ukoliko se nepotpuna faktorizaciju predstavi kao [45]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} + \mathbf{E}, \quad (4.7)$$

gde je \mathbf{E} matrica greške faktorizacije, prekondicionirane matrice su oblika:

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{AU}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{U}^{-1}. \quad (4.8)$$

Za prekondicioniranje sama matrica greške, \mathbf{E} , nije toliko važna koliko je važna prekondicionirana matrica greške $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{U}^{-1}$. Kada je matrica \mathbf{A} dijagonalno dominantna, tada su i \mathbf{L} i \mathbf{U} matrice sa niskim kondicionim brojem i $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{U}^{-1}$ ne unosi velike perturbacije jediničnoj matrici u (4.8). Kada nema dijagonalne dominantnosti, \mathbf{L}^{-1} i \mathbf{U}^{-1} mogu da imaju velike norme i $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{U}^{-1}$ tada unosi velike perturbacije jediničnoj matrici u (4.8). Eksperimentalno je potvrđeno da u takvim slučajevima prekondicioniranje ILU tipa pokazuju loše performanse [45]. Takođe, zbog inherentne sekvencijalne prirode, mogućnosti efikasne paralelizacije su znatno umanjene [69].

4.3. Prekondicioniranje zasnovano na aproksimaciji inverzne matrice

Jedno od mogućih rešenja u situacijama kada matrica sistema nije dijagonalno dominantna je nalaženje matrice prekondicioniranja metodom koja se ne zasniva na rešavanju sistema linearnih jednačina. Tako se, recimo, sistem može prekondicionirati direktnom aproksimacijom matrice inverzne matrici sistema \mathbf{A} . Jednostavan postupak za nalaženje aproksimativnog inverza je pokušaj proračuna matrice \mathbf{M} kojom se minimizira Frobenijusova norma (videti *Prilog A*) matrice ostatka $(\mathbf{I} - \mathbf{AM})$ [45]:

$$F(\mathbf{M}) = \|\mathbf{I} - \mathbf{AM}\|_F^2, \quad (4.9)$$

i u tom slučaju se radi o desnoj aproksimaciji inverza matrice \mathbf{A} . Leva aproksimacija inverza bi se odnosila na matricu koja minimizira funkciju $\|\mathbf{I} - \mathbf{MA}\|_F^2$.

Predstavljajući jediničnu matricu i matricu sistema preko kolona, (4.9) se, u slučaju desnog prekondicioniranja, rastavlja na problem:

$$F(\mathbf{M}) = \|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{M}\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|\mathbf{e}_j - \mathbf{A}\mathbf{m}_j\|_2^2, \quad (4.10)$$

gde su \mathbf{e}_j i \mathbf{m}_j j -te kolone jedinične matrice \mathbf{I} i matrice \mathbf{M} . Minimizacija izraza (4.10) se može obaviti globalno, koristeći proređenu matricu \mathbf{M} u celini, odnosno minimizacijom pojedinačnih funkcija $f_j(\mathbf{m}) = \|\mathbf{e}_j - \mathbf{A}\mathbf{m}_j\|_2^2$, $j = 1, 2, \dots, n$, što je izuzetno povoljno za paralelne implementacije. I pored izuzetnog potencijala za paralelizaciju, vreme preprocesiranja je tipično znatno duže nego kod, recimo, ILU(0), sa kojim se može porediti po broju iteracija za neke klase problema [105].

Kod pristupa levog ili desnog prekondicioniranja teško je unapred proceniti da li je rezultujuća matrica \mathbf{M} koja aproksimira inverz matrice sistema singularna. Zbog toga se mogu koristiti dve druge klase aproksimacija inverzne matrice koje se ne zasnivaju na minimizaciji Frobenijusove norme. Tako drugoj klasi aproksimacija inverzne matrice pripadaju metode proređenih faktorizovanih aproksimativnih inverza, poput FSAI (Factorized Sparse Approximate Inverse) [106] i AINV (Approximate Inverse Technique) [107]. Pokazalo se da su performanse ovih pristupa za potrebe prekondicioniranja problema numeričke elektromagnetike poprilično obeshrabrujuće [108].

Treća klasa aproksimacija inverzne matrice je postupak inverznog ILU-a. Ovaj postupak se bazira na aproksimativnom invertovanju nepotpune faktorizacije matrice. Zbog nepotpune faktorizacije kao prve faze postupka znatno je umanjena mogućnost paralelizacije kod ovog pristupa [109].

4.4. Metode zasnovane na dekompoziciji domena

Metode dekompozicije domena se odnose na skup postupaka koji se baziraju na principu rešavanja problema celog domena, Ω , na osnovu rešenja za s poddomena Ω_i , gde je $\Omega = \bigcup_{i=1}^s \Omega_i$ [45]. Poddomeni se mogu preklapati i tada je $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$.

4.4.1. Prekondicioniranje bazirano na aditivnom Švarzovom postupku

Švarzov postupak je postupak iterativne dekompozicije domena [45]. Kod aditivnog Švarzovog postupka se, analogno blokovskoj Jakobijevoj iteraciji, ažuriranje komponenata u svim poddomenima vrši samo jednom, na kraju ciklusa po svim poddomenima.

Neka je \mathbf{R}_i $n_i \times n$ matrica koja opisuje preslikavanje nepoznatih celog domena Ω (\mathbf{x}) na nepoznate poddomena Ω_i (\mathbf{x}_i). Tada \mathbf{R}_i sadrži samo nule i jedinice kao elemente i važi $\mathbf{x}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{x}$, odnosno \mathbf{R}_i je operator restrikcije nepoznatih sa Ω na Ω_i . Odgovarajući operator prolongacije je dat kao \mathbf{R}_i^T i njime se nepoznate poddomena Ω_i preslikavaju na domen Ω . U tom slučaju se matrica koja lokalno karakteriše interakcije nepoznatih poddomena Ω_i može predstaviti kao $\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i^T$.

Kod aditivnog Švarzovog postupka [45] nova aproksimacija se određuje preko:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \sum_{i=1}^s \mathbf{R}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}), \quad (4.11)$$

gde je s broj poddomena. Ukoliko se usvoji da je $\mathbf{T}_i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i$, imamo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \sum_{i=1}^s \mathbf{T}_i (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}) = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^s \mathbf{P}_i \right) \mathbf{x}^{(k)} + \sum_{i=1}^s \mathbf{T}_i \mathbf{b}, \quad (4.12)$$

gde je $\mathbf{P}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{A}$.

Sa stanovišta iteracije fiksne tačke (stacionarne linearne iterativne metode prvog reda) je $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \sum_{i=1}^s \mathbf{P}_i$ i $\boldsymbol{\varphi} = \sum_{i=1}^s \mathbf{T}_i \mathbf{b}$. Kako je $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}$, to za matricu prekondicioniranog sistema imamo $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^s \mathbf{P}_i$, a za samu matricu prekondicioniranja se dobija:

$$\mathbf{M}^{-1} = \sum_{i=1}^s \mathbf{P}_i \mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^s \mathbf{T}_i = \sum_{i=1}^s \mathbf{R}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i. \quad (4.13)$$

Izraz (4.13) opisuje široku klasu matrica prekondicioniranja koje se mogu dobiti usvajanjem različitih kriterijuma za dekompoziciju problema na poddomene

Ω_i . Prirodan izbor predstavlja kriterijum bliskosti funkcija bazisa i ovaj pristup će biti detaljnije prikazan u sledećem poglavlju. Takođe, funkcije bazisa se mogu grupisati ne samo na osnovu geometrijskih osobina, već i na osnovu reda aproksimacije kod metoda koje koriste funkcije bazisa višeg reda [87].

4.4.2. Prekondicioniranje zasnovano na interakcijama između bliskih elemenata (Near-Field Preconditioner - NFP)

Osnovna implementacija ILU-a, ILU(0), se lako i jednostavno proračunava, dok se njen glavni nedostatak [69] zasniva na činjenici da je šablon proređivanja matrica \mathbf{L} i \mathbf{U} određen proređenošću polazne matrice \mathbf{A} , a ne konkretnom fizikom problema. Ovo ograničenje često rezultuje prekondicionerom male efikasnosti.

Slično, kod metoda kod kojih se aproksimira inverzna matricu se takođe odbacuju elementi na osnovu određenih numeričkih svojstava, a može se desiti i da neki lokalni minimum Frobenijusove norme značajno uspori konvergenciju procesa izračunavanja matrice \mathbf{M} .

Najjednostavniji prekondicioner zasnovan na interakciji između bliskih elemenata koristi činjenicu da su spektralne osobine matrice sistema \mathbf{A} upravo u najvećoj meri određene zavisnostima baziranim na malom fizičkom rastojanju između elemenata. Tako se matična jednačina (3.1) može napisati u obliku [69]:

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{A}^{near} + \mathbf{A}^{far})\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (4.14)$$

gde je:

$$a_{jk}^{near} = \begin{cases} a_{jk} & R_{jk} \leq \varepsilon \\ 0 & \text{drugde} \end{cases} \quad (4.15)$$

i $\mathbf{A}^{far} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^{near}$, dok R_{jk} predstavlja rastojanje između funkcija bazisa j i k , a ε je usvojeno rastojanje. Tako definisana proređena matrica \mathbf{A}^{near} sadrži samo one elemente koji opisuju interakcije između funkcija bazisa sa pragom rastojanja ε .

Na osnovu matrice rastojanja između (centara) funkcija bazisa se za svaku od funkcija bazisa j formira matrica \mathbf{M}^j tako da važi:

$$m_{p,q}^j = a_{k_p^j, k_q^j}^{near}, \quad p, q = 1, \dots, P_j, \quad (4.16)$$

gde su p i q indeksi vrste i kolone, respektivno, \mathbf{k}^j je vektor svih indeksa funkcija bazisa koje se nalaze u zapremini poluprečika $\varepsilon/2$ u odnosu na centar posmatrane funkcije bazisa, a P_j je veličina vektora \mathbf{k}^j . Na osnovu matrica \mathbf{M}^j se zatim računaju matrice \mathbf{N}^j kao njihove inverzne:

$$\mathbf{N}^j = (\mathbf{M}^j)^{-1}. \quad (4.17)$$

Elementi matrica \mathbf{N}^j se potom smeštaju na odgovarajuće pozicije (one koje su zauzimali u \mathbf{A}^{near}) u okviru matrice prekondicioniranja \mathbf{Q}^j za j -tu funkciju bazisa, tako da važi:

$$q_{k_p^j, k_q^j}^j = n_{p,q}^j. \quad (4.18)$$

Ovaj postupak se ponavlja za sve funkcije bazisa, $j = 1, \dots, N$, kako bi se izračunao prekondicioner \mathbf{Q}^j za svaku od njih i finalna matrica prekondicioniranja dobila kao:

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}^j. \quad (4.19)$$

Na taj način rezultujući prekondicioner predstavlja zbir svih prekondicionera za svaku od funkcija bazisa zasnovanih na lokalnim interakcijama sa stanovišta geometrije.

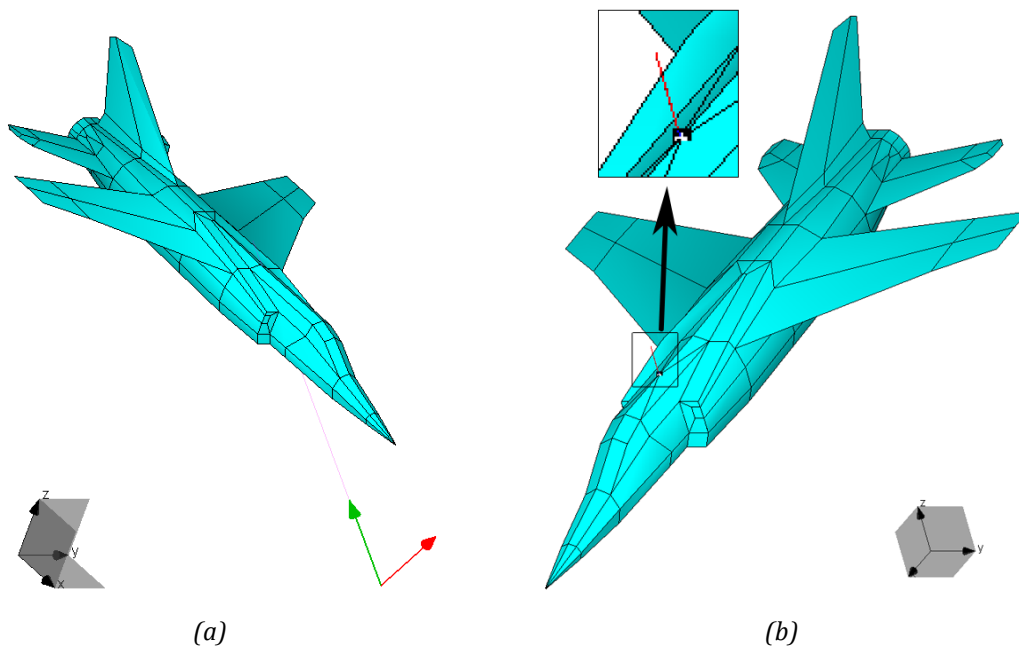
Za svaku od pojedinačnih matrica prekondicioniranja u (4.19) potrebno je naći inverznu matricu lokalne matrice impedansi \mathbf{M}^j , tako da je neophodno uraditi N inverzija matrica, pri čemu je njihova veličina određena parametrom ε kojim se kontroliše opseg interakcija koje se uzimaju u obzir.

4.5. Numerički primer: Kondicioni broj i broj iteracija za različite stepene popunjenosti matrice prekondicioniranja

Za potrebe razmatranja efekata (levog) prekondicioniranja sistema dobijenog Galerkinovim testiranjem površinskih integralnih jednačina u formi aproksimacije same matrice sistema i aproksimacije njene inverzne matrice, uz upotrebu jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa višeg reda, biće analizirana

matrica sistema na učestanosti $f = 165$ MHz modela lovačkog aviona u dva scenarija:

- pobuđenog ravnim talasom sa linijskom polarizacijom iz pravca $\varphi = 0^\circ$ i $\theta = -30^\circ$, kao na Slici 4.1a;
- pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom, kao na Slici 4.1b.



Slika 4.1 Model lovačkog aviona pobuđenog: (a) ravnim talasom; (b) četvrt-talasnom monopol antenom.

Kako matrica sistema nema nultih elemenata, to će biti primenjeno anuliranje elemenata matrice na osnovu njihovog modula, tako da određen procenat ukupnog broja elemenata (ne računajući elemente na dijagonali) ima nenulte vrednosti (uz očuvanje simetrije matrice).

Anuliranje je moguće sprovesti na dva nivoa:

- pre određivanja inverzne matrice na osnovu matrice sistema (direktnom metodom), što će biti označeno sa “pre” (i predstavlja aproksimaciju same matrice sistema), gde se najpre izvrši anuliranje elemenata matrice polaznog sistema kako bi se postigao zadati stepen popunjenosti matrice, ne računajući elemente na dijagonali, i zatim odredi njen inverz, koji se koristi kao matrica levog prekondicioniranja – ovaj pristup predstavlja gornju granicu implicitnog prekondicioniranja;

- posle određivanja inverzne matrice matrice sistema (direktnom metodom), što će biti označeno sa “posle” (i predstavlja aproksimaciju inverzne matrice matrice sistema), gde se najpre odredi invers matrice sistema i zatim izvrši anuliranje elemenata kako bi se postigao zadati stepen popunjenosti matrice, ne računajući elemente na dijagonali, koja se koristi kao matrica levog prekondicioniranja – ovaj pristup predstavlja gornju granicu eksplicitnog prekondicioniranja.

Usvojen je relativni ostatak od 10^{-4} i korišćena je CG metoda data u poglavlju 3.3.1.2. Za različite stepene popunjenosti pre, posle i pre i posle matrice inverzije određeni su brojevi iteracija potrebni za postizanje datog relativnog ostatka i tabelarno prikazani u Tabelama 4.1 i 4.2 za slučajeve lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnom monopol antenom, respektivno. Takođe su navedene i vrednosti za broj nepoznatih u oba slučaja, kao i kondicioni broj i broj iteracija bez prekondicioniranja.

Polazne matrice sistema razmatranih modela nisu dijagonalno dominantne, tako da su slabiji rezultati dobijeni aproksimacijom same matrice sistema u odnosu na aproksimaciju inverzne matrice sasvim očekivani za veće stepene popunjenosti. To je dodatno potvrđeno i rezultatima za kondicioni broj matrice sistema, koji su, zajedno sa rezultatima za broj iteracija dati u Tabelama 4.3 i 4.4, za prvi i drugi model, respektivno. Pritom se rezultati u slučajevima gde je kondicioni broj visok ne mogu smatrati pouzdanim, nezavisno od broja iteracija. U posmatranim primerima implicitno prekondicioniranje se pokazalo u velikoj meri nepredvidivim sa smanjenjem stepena popunjenosti polazna matrice, dok je kod eksplicitnog prekondicioniranja prisutan konzistentan trend porasta broja iteracija sa smanjenjem stepena popunjenosti inverzne matrice.

Kod modela lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom za neke vrednosti kombinovanog proređivanja (proređivanje polazne matrice sistema i ponovnog proređivanja nakon inverzije tako dobivene matrice) se čak ni ne dobija rešenje za usvojeni relativni ostatak ni nakon (za ovaj primer usvojenog) maksimalnog broja iteracija od 50 000.

Tabela 4.1 Kondicioni broj (KB) i broj iteracija (BI) modela lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom za različite stepene popunjenosti matrice prekondicioniranja sa proređivanjem pre, posle i pre i posle matrice inverzije (klasične funkcije bazisa višeg reda). (Broj nepoznatih je 1906, dok je za sistem bez prekondicioniranja kondicioni broj $8,24e+07$ i broj iteracija 1567.)

Stepen Popune (%)	Pre		Posle		Pre + Posle	
	KB	BI	KB	BI	KB	BI
95	2,85e+04	169	1,31e+00	1	2,86e+04	172
90	3,90e+05	137	2,03e+00	2	2,70e+06	177
85	1,45e+06	17	3,76e+00	4	5,26e+07	26
80	4,47e+05	167	7,64e+00	6	9,38e+06	252
75	3,85e+05	227	1,66e+01	11	1,29e+07	418
70	4,74e+05	497	3,10e+01	18	2,18e+07	1042
65	1,08e+06	360	6,55e+01	27	5,00e+07	900
60	1,15e+06	235	1,32e+02	42	5,91e+07	721
55	3,28e+06	173	3,60e+02	65	4,58e+08	782
50	9,61e+06	123	1,03e+03	106	1,08e+09	1020
45	3,74e+06	174	1,58e+03	173	1,80e+09	978
40	7,25e+06	155	5,83e+03	296	1,51e+09	1354
35	3,96e+06	205	6,78e+03	498	1,76e+09	1208
30	1,36e+07	113	1,86e+04	748	1,52e+10	1042
25	4,92e+07	78	6,26e+04	1385	6,94e+09	1356
20	1,16e+07	119	5,06e+04	2031	4,89e+09	841
15	3,91e+07	251	1,19e+05	2761	3,80e+09	482
10	8,38e+07	116	1,74e+05	4233	8,47e+09	760
5	5,78e+07	366	2,15e+05	5243	9,84e+08	1055

Tabela 4.2 Kondicioni broj (KB) i broj iteracija (BI) modela lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom za različite stepene popunjenosti matrice prekondicioniranja sa proređivanjem pre, posle i pre i posle matrice inverzije (klasične funkcije bazisa višeg reda).
(Broj nepoznatih je 1970, dok je za sistem bez prekondicioniranja kondicioni broj $7,84e+07$ i broj iteracija 4962.)

Stepen Popune (%)	Pre		Posle		Pre + Posle	
	KB	BI	KB	BI	KB	BI
95	1,65e+04	146	1,33e+00	1	1,65e+04	147
90	6,95e+04	294	2,08e+00	2	8,63e+04	289
85	4,90e+05	171	3,87e+00	3	6,12e+06	228
80	5,31e+05	321	7,44e+00	6	1,87e+07	551
75	4,33e+06	248	1,55e+01	11	1,76e+08	1139
70	1,24e+06	296	3,26e+01	18	3,20e+07	713
65	8,55e+05	605	8,21e+01	29	4,03e+07	1738
60	5,76e+06	60	1,58e+02	46	1,91e+09	509
55	2,01e+06	338	4,45e+02	78	2,67e+08	1775
50	2,77e+06	384	8,03e+02	126	3,35e+08	3314
45	7,53e+06	327	8,01e+03	197	6,76e+09	13570
40	1,02e+07	151	7,88e+03	310	3,30e+09	3047
35	1,10e+07	192	7,06e+03	456	9,33e+09	18393
30	9,27e+06	311	3,58e+04	708	2,66e+09	X
25	5,70e+07	54	2,72e+04	1178	7,65e+10	6812
20	3,05e+07	153	1,42e+05	1950	1,10e+10	X
15	3,56e+07	122	3,97e+05	2616	2,77e+09	14021
10	1,32e+08	44	1,65e+05	6299	4,33e+10	1614
5	2,23e+08	412	2,53e+05	X	5,27e+09	X

(X - nije došlo do konvergencije ni nakon 50 000 iteracija)

4.6. Rezime

U ovoj glavi su predstavljeni neki od najčešće korišćenih postupaka za prekondicioniranje sistema linearnih jednačina, koji imaju za cilj da smanje kondicioni broj matrice sistema i samim tim i broj iteracija potreban za njegovo rešenje. Pored postupaka koji se zasnivaju na numeričkim osobinama matrica (ILU) i aproksimaciji inverzne matrice razmatrani su i često korišćeni postupci prekondicioniranja zasnovani na interakcijama između bliskih elemenata. Na osnovu rezultata numeričkog primera je pokazano da se korišćenjem standardnih prekondicionera može smanjiti broj iteracija pri iterativnom rešavanju, čak i u slučaju kada se koriste jednostavne hijerarhijske (klasične) funkcije bazisa višeg reda. Međutim, za takvo smanjenje je potrebna velika popunjenost matrica prekondicioniranja, pa je za samo određivanje tih matrica potrebno ne mnogo manje operacija nego za direktno rešenje sistema. U cilju rešenja ovog problema u nastavku rada će biti date nove metode prekondicioniranja bazirane na ortogonalizaciji funkcija bazisa i jednačina metode momenata.

5. Opšti postupak prekondicioniranja baziran na linearnom kombinovanju funkcija bazisa i test funkcija

U prethodnoj glavi su predstavljene neki od postupaka za prekondicioniranje sistema linearnih jednačina kako bi se poboljšala konvergencija pri njihovom rešavanju korišćenjem iterativnih metoda. Linearno kombinovanje funkcija bazisa i test funkcija predstavlja formu prekondicioniranja i njegovi efekti će biti razmatrani u ovoj glavi, preko odgovarajućih matricnih ekvivalenata. Na taj način se može jednostavnije sagledati linearno kombinovanje funkcija bazisa i test funkcija i identifikovati potencijal za unapređenje efikasnosti iterativnog rešavanja sistema linearnih jednačina za ovde usvojen tip površinskih integralnih jednačina i formu njihovog testiranja.

5.1. Matrični ekvivalent linearnog kombinovanja funkcija bazisa

Posmatrajmo MoM sistem jednačina Galerkinovog tipa:

$$\sum_{i=1}^N z_{ji} a_i = v_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

gde je $z_{ji} = \langle \mathbf{f}_j, \mathcal{J} \mathbf{f}_i \rangle$ i $v_j = \langle \mathbf{f}_j, \mathbf{g} \rangle$ i test funkcije su identične funkcijama bazisa.

Neka se odstupi od Galerkinovog tipa testiranja tako što se i -toj funkciji bazisa doda k -ta funkcija bazisa preko:

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_i + C_{ki} \mathbf{f}_k, \quad k \neq i, \quad (5.2)$$

gde je C_{ki} težina sa kojom se k -ta funkcija inicijalnog bazisa kombinuje sa i -tom funkcijom inicijalnog bazisa u novu, i -tu, funkciju bazisa modifikovanog sistema, označenu oznakom '. Pritom usvajanje jedinične multiplikativne konstante za i -tu funkciju inicijalnog bazisa pri kombinovanju u novu funkciju bazisa u izrazu (5.2) ne umanjuje generalnost samog postupka kombinovanja. Dalje, neka test funkcije ostanu nepromenjene, čime i vektor slobodnih članova ostaje nepromenjen.

Tada imamo (za standardnu definiciju unutrašnjeg proizvoda (2.21)):

$$z'_{ji} = \langle \mathbf{f}_j, \mathcal{J}\mathbf{f}'_i \rangle = \langle \mathbf{f}_j, \mathcal{J}(\mathbf{f}_i + C_{ki}\mathbf{f}_k) \rangle = \langle \mathbf{f}_j, \mathcal{J}\mathbf{f}_i \rangle + C_{ki} \langle \mathbf{f}_j, \mathcal{J}\mathbf{f}_k \rangle, \quad (5.3)$$

odnosno:

$$z'_{ji} = z_{ji} + C_{ki}z_{jk}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.4)$$

Ukoliko je \mathbf{Z} matrica sistema (5.1), a \mathbf{Z}' matrica sistema u kome je i -ta funkcija bazisa zamenjena kombinacijom i -te i k -te funkcije bazisa prvobitnog sistema (preko 5.2), na osnovu (5.4) dobija se da se matrica tako transformisanog sistema, \mathbf{Z}' , razlikuje u odnosu na matricu \mathbf{Z} samo u i -toj koloni. Elementi i -te kolone matrice \mathbf{Z}' se dobijaju dodavanjem ponderisanih elemenata k -te kolone (kompleksnom konstantom C_{ki}) i -toj koloni matrice \mathbf{Z} .

U matricnoj notaciji relaciju (5.4) možemo napisati kao:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}\mathbf{M}_R^{-1}, \quad (5.5)$$

gde je:

$$\mathbf{M}_R^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & C_{ki} & 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & N \end{array} \right] \\ \begin{array}{ccc} 1 & i & N \end{array} \end{array}, \quad (5.6a)$$

i

$$\mathbf{M}_R = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -C_{ki} & 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & N \end{array} \right] \\ \begin{array}{ccc} 1 & i & N \end{array} \end{array}. \quad (5.6b)$$

Analogno, ukoliko se (5.2) generalizuje na slučaj kombinovanja sa više (L) funkcija bazisa:

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_i + \sum_{p=1}^L C_{k_p i} \mathbf{f}_{k_p}, \quad k_p \neq i, \quad (5.7)$$

dobija se:

$$\mathbf{M}_R^{-1} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & C_{k_1 i} & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & C_{k_L i} & 0 & 1 & 0 & k_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & N \\ \hline 1 & & i & & & & N \end{array} \right], \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{M}_R = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -C_{k_1 i} & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -C_{k_L i} & 0 & 1 & 0 & k_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & N \\ \hline 1 & & i & & & & N \end{array} \right], \quad (5.8b)$$

odnosno, opšti slučaj kombinovanja funkcija bazisa tipa (5.7) je ekvivalentan desnom prekondicioniranju matrice sistema (izraz (5.5)) gde je matrica prekondicioniranja data sa (5.8a).

5.2. Matrični ekvivalent linearnog kombinovanja test funkcija

Posmatrajmo sistem (5.1) i j -toj test funkciji dodajmo k -tu test funkciju (bez gubitka generalnosti u pogledu jedinične multiplikativne konstante za inicijalnu j -tu test funkciju):

$$\mathbf{f}''_j = \mathbf{f}_j + D_{kj} \mathbf{f}_k, \quad k \neq j, \quad (5.9)$$

gde je D_{kj} težina sa kojom se k -ta test funkcija kombinuje sa j -tom test funkcijom polaznog sistema u novu, j -tu, test funkciju modifikovanog sistema, označenu oznakom ''.

Neka pritom funkcije bazisa ostanu nepromenjene. Tada imamo:

$$z_{ji}'' = \langle \mathbf{f}_j'', \mathcal{F}\mathbf{f}_i \rangle = \langle \mathbf{f}_j + D_{kj} \mathbf{f}_k, \mathcal{F}\mathbf{f}_i \rangle = \langle \mathbf{f}_j, \mathcal{F}\mathbf{f}_i \rangle + D_{kj}^* \langle \mathbf{f}_k, \mathcal{F}\mathbf{f}_i \rangle, \quad (5.10)$$

odnosno:

$$z_{ji}'' = z_{ji} + D_{kj}^* z_{ki}, \quad i=1, \dots, N, \quad (5.11)$$

gde * označava konjugovanje. Pritom takođe dolazi i do promene jednog elementa vektora slobodnih članova kao:

$$v_j'' = \langle \mathbf{f}_j'', \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}_j + D_{kj} \mathbf{f}_k, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}_j, \mathbf{g} \rangle + D_{kj}^* \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{g} \rangle = v_j + D_{kj}^* v_k. \quad (5.12)$$

Ukoliko je \mathbf{Z} matrica sistema (5.1), a \mathbf{Z}'' matrica i \mathbf{v}'' vektor slobodnih članova sistema u kome je j -ta test funkcija zamenjena kombinacijom j -te i k -te test funkcije prvobitnog sistema (preko (5.9)), na osnovu (5.11) dobija se da se matrica tako transformisanog sistema, \mathbf{Z}'' , razlikuje u odnosu na matricu \mathbf{Z} samo u j -toj vrsti. Elementi j -te vrste matrice \mathbf{Z}'' se dobijaju dodavanjem ponderisanih elemenata k -te vrste (kompleksnom konstantom D_{kj}^*) j -toj vrsti matrice \mathbf{Z} . Vektor slobodnih članova \mathbf{v}'' transformisanog sistema se razlikuje od vektora slobodnih članova \mathbf{v} polaznog sistema samo po j -tom elementu, koji se dobija dodavanjem ponderisanog k -tog elementa (kompleksnom konstantom D_{kj}^*) j -tom elementu vektora \mathbf{v} .

U matricnoj notaciji relacije (5.11) i (5.12) možemo napisati kao:

$$\mathbf{Z}'' = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{v}'' = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{v}, \quad (5.13a,b)$$

gde je:

$$\mathbf{M}_L^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{kj}^* & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ \\ j \cdot \\ \\ N \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1 & k & N \end{array} \end{array} \quad (5.14)$$

Analogno, ukoliko se (5.9) generalizuje na slučaj kombinovanja sa više (L) test funkcija:

$$\mathbf{f}_j'' = \mathbf{f}_j + \sum_{p=1}^L D_{k_p j} \mathbf{f}_{k_p}, \quad k_p \neq j, \quad (5.15)$$

dobija se:

$$\mathbf{M}_L^{-1} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & D_{k_1 j}^* & 0 & 1 & D_{k_L j}^* & 0 & j, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & N \\ 1 & k_1 & & & k_L & N & \end{array} \right] \quad (5.16)$$

odnosno, opšti slučaj kombinovanja test funkcija tipa (5.9) je ekvivalentan levom prekondicioniranju matrice sistema (izraz (5.13a)) i vektora slobodnih članova (izraz (5.13b)) gde je matrica prekondicioniranja data sa (5.16).

5.3. Prekondicioniranje bazirano na linearnom kombinovanju funkcija bazisa i test funkcija

Ukoliko na sistem (5.1) primenimo linearno kombinovanje funkcija bazisa u formi (5.7) i istovremeno identično ($C_{k_p i} = D_{k_p j}, i = j$) linearno kombinovanje test funkcija oblika (5.15), priroda Galerkinovog testiranja se održava, i na osnovu (5.5) i (5.13) imamo:

$$\mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{u}, \quad (5.17)$$

gde je važno primetiti da u ovom slučaju važi $\mathbf{M}_L^H = \mathbf{M}_R$.

Sistem (5.17) ima formu obostrano prekondicioniranog sistema. Dakle, linearno kombinovanje funkcija bazisa i test funkcija u polaznom sistemu (5.1) je ekvivalentno obostranom prekondicioniranju matricama \mathbf{M}_L^{-1} i \mathbf{M}_R^{-1} . Zbog $\mathbf{M}_L^{-1} = (\mathbf{M}_R^{-1})^H$, inicijalno simetričan sistem (sa simetričnom matricom sistema \mathbf{Z}) će samo u posebnom slučaju zadržati osobinu simetrije matrice (ekvivalentnog) sistema.

Za simetričnu matricu sistema, \mathbf{Z} , uslov očuvanja simetrije matrice ekvivalentnog sistema, $\mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{M}_R^{-1}$, se može izraziti preko:

$$\mathbf{M}_L^{-1} = (\mathbf{M}_R^{-1})^T. \quad (5.18)$$

Kako uvek važi $\mathbf{M}_L^{-1} = (\mathbf{M}_R^{-1})^H$ dobija se da je za očuvanje simetrije prekondicioniranog sistema neophodno da matrica \mathbf{M}_L^{-1} (a time i \mathbf{M}_R^{-1}) ima čisto realne elemente, odnosno da težine sa kojima se kombinuju test funkcije i funkcije bazisa budu realni brojevi, za standardnu definiciju unutrašnjeg proizvoda (2.21).

5.4. Rezime

Linearno kombinovanje funkcija bazisa i test funkcija predstavlja desno i levo prekondicioniranje, respektivno. U ovoj glavi su prikazane matrične forme takvih kombinovanja. Na osnovu njih su izvedeni potrebni uslovi vezani za očuvanje simetrije prekondicioniranog sistema. Od ovih uslova će se poći u osmoj glavi pri razmatranjima vezanim za konstruisanje novog postupka prekondicioniranja.

6. Matrična ekvilibracija

Performanse iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina (kao važne komponente efikasnog elektromagnetskog modelovanja) su u ogromnoj meri uslovljene kondicionim brojem matrice sistema. Linearno kombinovanje funkcija bazisa, koje predstavlja fokus ovog rada, uključuje u sebe i skaliranje tih funkcija bazisa. Pre nego što se u narednim glavama puna pažnja posveti linearnom kombinovanju funkcija bazisa, u ovoj glavi će biti ispitano kako samo skaliranje utiče na kondicioni broj matrice i broj iteracija potrebnih za iterativno rešenje sistema linearnih jednačina.

Kod nekih klasa matrica je izuzetno poželjno skaliranje dijagonalnih elemenata na jediničan modul, dok je kod drugih poželjno da norme vrsta i kolona budu ujednačene. Ove različite vrste skaliranja matrice sistema se nazivaju matričnom ekvilibracijom i njenom primenom se kondicioni broj može značajno popraviti. U ovoj glavi će biti predstavljena osnovna teorija matrične ekvilibracije, dovodeći je takođe u vezu sa drugim postupcima za smanjenje kondicionog broja MoM/SIE matričnih jednačina. Biće pokazano da je matrična ekvilibracija opšti postupak kojim se mogu: a) ujednačiti veličine kako različitih tipova izvora, tako i različitih tipova polja kod SIE, što se primenjuje za smanjenje kondicionog broja kod površinskih integralnih jednačina mešovitog tipa i visokog kontrasta karakteristika materijala, i b) skalirati funkcije bazisa i test funkcije u MoM-u, sa ciljem smanjenja kondicionog broja u slučaju primene funkcija bazisa višeg reda u prisustvu elemenata različitih veličina. Adekvatnim izborom težinskih koeficijenata mogu se ostvariti poboljšanja slična onima kada se primenjuju drugi znatno komplikovaniji i numerički zahtevniji postupci. Biće takođe pokazano da se kombinacija ujednačavanja i skaliranja može ostvariti koristeći veoma jednostavnu matričnu ekvilibraciju zasnovanu samo na amplitudama dijagonalnih elemenata i normi-2 vrsta/kolona MoM matrice. Pritom, matrična ekvilibracija se može jednostavno primeniti na bilo koju postojeću MoM matričnu jednačinu u kombinaciji sa drugim postupcima za smanjenje kondicionog broja.

6.1. Matrična ekvibracija kao oblik prekondicioniranja

U opštem slučaju matrična ekvibracija predstavlja poseban oblik dvostranog prekondicioniranja, pri čemu se polazna matrična jednačina u formi $\mathbf{Za} = \mathbf{v}$ zamenjuje ekvivalentnom matričnom jednačinom oblika:

$$\mathbf{PZQb} = \mathbf{Pv}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{Qb}, \quad (6.1a,b)$$

gde su matrice prekondicioniranja \mathbf{P} i \mathbf{Q} kvadratne matrice reda N sa elementima p_{ij} i q_{ij} , respektivno.

Da bi ovakvo prekondicioniranje bilo efikasno, matrice \mathbf{P} i \mathbf{Q} treba da budu takve da važi:

- a) ekvivalentna matrica \mathbf{PZQ} je što je moguće bliža jediničnoj matrici, sa kondicionim brojem koji je znatno manji od kondicionog broja polazne matrice \mathbf{Z} ;
- b) matrice \mathbf{P} i \mathbf{Q} su što je moguće više proređene, kako bi operacije njihovog proizvoda sa matricama ili vektorima imale što manji broj računskih operacija; i
- c) njihovo određivanje nije isuviše zahtevno u smislu broja računskih operacija i potrebnog procesorskog vremena.

Kako bi se maksimalno pojednostavilo određivanje ovih matrica može se usvojiti da je matrica \mathbf{Q} jednaka jediničnoj matrici \mathbf{I} , odnosno $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, čime se dvostrano prekondicioniranje efektivno svodi na levo prekondicioniranje. Najjednostavnije i najmanje zahtevno sa aspekta proračuna je takozvano dijagonalno prekondicioniranje kod koga se svaka vrsta normalizuje dijagonalnim elementom, odnosno:

$$\mathbf{P} = \text{diag}(1/a_{11}, \dots, 1/a_{nn}). \quad (6.2)$$

U najvećem broju slučajeva (sa retkim izuzecima) ovakvo prekondicioniranje nema zadovoljavajuće performanse.

Generalnije, može se usvojiti da su obe matrice prekondicioniranja u (6.1a) dijagonalne:

$$\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, \dots, q_n). \quad (6.3a,b)$$

U tom slučaju se svaka vrsta množi odgovarajućim dijagonalnim elementom matrice \mathbf{P} , i svaka kolona odgovarajućim dijagonalnim elementom matrice \mathbf{Q} . Ovakvo prekondicioniranje se naziva matričnom ekvibracijom i predstavlja istovremenu (kombinovanu) ekvibraciju vrsta i kolona.

Usvajajući da je matrica \mathbf{Q} jedinična, matrična ekvibracija se svodi na ekvibraciju vrsta, i u posebnom slučaju, uz uslov (6.2), na dijagonalno prekondicioniranje. Ukoliko se usvoji da je matrica \mathbf{P} jednaka jediničnoj matrici, matrična ekvibracija se svodi na ekvibraciju kolona.

6.2. Matrična ekvibracija kao metoda ujednačavanja izvora i jednačina pri formiranju sistema površinskih integralnih jednačina

Jedan od glavnih razloga za lošu uslovljenost (visok kondicioni broj) MoM/SIE matrice kod dielektričnih i kompozitnih metalnih i dielektričnih struktura je taj što izvori (npr. površinske gustine električnih i magnetskih struja) i/ili integralne jednačine (npr. integralne jednačine električnog i magnetskog polja) imaju veoma različite nivoe odgovarajućih matričnih elemenata. Ova razdešenost između izvora i/ili integralnih jednačina se može smanjiti odgovarajućim skaliranjem.

Tako se EFIE i MFIE uravnotežavaju množenjem MFIE talasnom impedansom [110]. Dodatno uravnotežavanje se postiže množenjem električnih struja \mathbf{J} talasnom impedansom [111]. Obe vrste skaliranja se primenjuju za uravnotežavanje PMCHWT i Mulerove integralne jednačine [112]. Slično, MFIE se množe, i magnetske struje \mathbf{M} dele talasnom impedansom kako bi se uravnotežila PMCHWT i Mulerova integralna jednačina u [93]. Skaliranje više od jednog tipa izvora i/ili integralne jednačine se razmatra u [113]. Svi ovi primeri pokazuju da je skaliranje kako izvora, tako i integralnih jednačina važno za dobro uravnotežavanje.

Uravnotežavanje izvora i integralnih jednačine se može obaviti odgovarajućom matricnom ekvilibracijom MoM/SIE matrice jednačine. Neka su integralne jednačine sistema SIE $\sum_{l=1}^m \mathcal{J}_{kl} \mathbf{f}_l = \mathbf{g}_k$, $k=1, \dots, m$, skalirane (pomnožene) težinskim koeficijentima p_k , $k=1, \dots, m$, i izvori skalirani (pomnoženi) težinskim koeficijentima q_l , $l=1, \dots, m$. Sistem SIE se tada može napisati kao:

$$\sum_{l=1}^m p_k \mathcal{J}_{kl} q_l \mathbf{f}_l' = p_k \mathbf{g}_k, \quad k=1, \dots, m, \quad (6.4)$$

gde je $\mathbf{f}_l' = \mathbf{f}_l / q_l$, $l=1, \dots, m$. Primenjujući MoM za rešavanje sistema SIE, dobija se sistem linearnih jednačina oblika:

$$p_k \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{N_l} z_{klj} q_l b_{lj} = p_k v_{ki}, \quad i=1, \dots, N_k, \quad k=1, \dots, m, \quad (6.5)$$

gde je $b_{lj} = a_{lj} / q_l$ i $z_{klj} = \langle \mathbf{w}_{ki}, \mathcal{J}_{kl} \mathbf{f}_{lj} \rangle$, $v_{ki} = \langle \mathbf{w}_{ki}, \mathbf{g}_k \rangle$. Ovaj sistem linearnih jednačina se može napisati u formi (6.1), sa matricama prekondicioniranja datim kao:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 \mathbf{I}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_m \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \mathbf{I}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_m \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad (6.6a,b)$$

gde su jedinične matrice \mathbf{I}_k reda N_k , $k=1, \dots, m$.

Na ovaj način se, polazeći od neuravnoteženog sistema SIE, mogu uravnotežiti izvori i integralne jednačine bilo kog sistema SIE koristeći matricnu ekvilibraciju MoM/SIE matrice jednačine.

6.3. Matricna ekvilibracija i optimalno ponderisanje funkcija bazisa i test funkcija

Kondicioni broj MoM matrice i brzina konvergencije iterativnog rešenja u velikoj meri zavise od adekvatnog skaliranja funkcija bazisa i test funkcija. U opštem slučaju, najniži kondicioni broj se postiže kod ujednačeno ponderisanih funkcija bazisa niskog reda definisanih na skoro uniformnom mesh-u. U tom slučaju se kondicioni broj i brzina konvergencije ne mogu poboljšati skaliranjem funkcija bazisa. Povećanje neuniformnosti mesh-a i uvođenje funkcija bazisa višeg reda može dramatično povećati kondicioni broj i dovesti do značajnog usporjenja

konvergencije [84, 88]. U ovim slučajevima kondicioni broj i brzina konvergencije se mogu značajno poboljšati adekvatnim ponderisanjem funkcija bazisa.

Tako se u [88] skoro-ortogonalne funkcije bazisa normalizuju tako da imaju jednake euklidske norme. Slično se u [89] maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa normalizuju na istu euklidsku normu. Međutim, takvo ujednačavanje daje dobre rezultate samo u slučaju elemenata približno iste veličine, i uz primenu funkcija bazisa višeg reda istog reda aproksimacije. U [92] optimalni težinski koeficijenti za funkcije bazisa višeg reda nad trougaonim elementima su određivani eksperimentalno korišćenjem pet posebnih trougaonih ćelija. Dodatno, ćelije različitih veličine su uzimane u obzir kroz takozvano "jedinično-tangentno" skaliranje.

Konačno, u [114] težinski koeficijenti funkcija bazisa i test funkcija su tako usvojeni da su amplitude dijagonalnih elemenata MoM/SIE matrice normalizovane na jedinicu. Takav izbor koeficijenata skaliranja se naziva dijagonalnim skaliranjem. Pokazalo se da je dijagonalno skaliranje uspešno u slučaju elemenata različitih veličina, sa različitim redovima aproksimacije, i čak i u slučaju integralnih jednačina mešovito tipa primenjenih na dielektrične strukture. U svim tim slučajevima testiranje se vrši Galerkinovom metodom, odnosno test funkcije su ponderisane na isti način kao i funkcije bazisa.

U opštem slučaju ponderisanje test funkcija se može razlikovati od ponderisanja funkcija bazisa. Skaliranje kako funkcija bazisa, tako i test funkcija se može obaviti pogodnom matričnom ekvibracijom MoM matrične jednačine.

Neka su test funkcije \mathbf{w}_i skalirane (pomnožene) težinskim koeficijentima p_i , $i = 1, \dots, N$, i funkcije bazisa \mathbf{f}_j skalirane (pomnožene) težinskim koeficijentima q_j , $j = 1, \dots, N$. Nove funkcije bazisa \mathbf{f}_j' su tada definisane preko:

$$\mathbf{f}_j' = q_j \mathbf{f}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.7)$$

a test funkcije \mathbf{w}_i' preko:

$$\mathbf{w}_i' = p_i \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.8)$$

Primenom ovakvih funkcija bazisa za MoM rešenje SIE date sa $\mathcal{F}\mathbf{f} = \mathbf{g}$, aproksimacija nepoznate funkcije \mathbf{f} dobija oblik:

$$\mathbf{f}_a' = \sum_{j=1}^N b_j \mathbf{f}_j', \quad (6.9)$$

gde su b_j , $j = 1, \dots, N$, nepoznati koeficijenti koji odgovaraju skaliranim funkcijama bazisa. Nakon testiranja skaliranim test funkcijama rezultujući sistem linearnih jednačina, predstavljen preko nepoznatih koeficijenata b_j se dobija u formi:

$$\sum_{j=1}^N p_i z_{ij} q_j b_j = p_i v_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.10)$$

gde su $z_{ij} = \langle \mathbf{w}_i, \mathcal{F}\mathbf{f}_j \rangle$, $v_i = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{g} \rangle$.

Povezivanjem prvobitnih i skaliranih nepoznatih koeficijenata preko:

$$a_j = q_j b_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.11)$$

i deljenjem i -te jednačine sa p_i , $i = 1, \dots, N$, skalirani sistem linearnih jednačina

(6.10) se svodi na prvobitni sistem linearnih jednačina $\sum_{j=1}^N z_{ij} a_j = v_i$, $i = 1, \dots, N$.

Obrnuto, rešenje polaznog sistema jednačina se može dobiti primenom (6.11) na rešenje skaliranog sistema (6.10). Skalirani sistem (6.10) i relacija (6.11) se mogu predstaviti u matričnom obliku (6.1), gde su \mathbf{P} i \mathbf{Q} dijagonalne matrice date sa (6.3). Samim tim, skaliranje funkcija bazisa i test funkcija se može izvesti matričnom ekvilibracijom matrične MoM jednačine dobivene sa neskaliranim funkcijama bazisa i test funkcijama.

6.4. Matrična ekvilibracija zasnovana isključivo na amplitudama MoM matričnih elemenata

Imajući sve prethodno navedeno u vidu, može se zaključiti da se matrična ekvilibracija može primeniti kako bi se značajno poboljšali kondicioni broj i konvergencija iterativnog rešenja u slučaju: a) integralnih jednačina mešovitog tipa, b) visokog kontrasta karakteristika materijala, c) funkcija bazisa višeg reda, i d) veoma neuniformnog meshing-a. (Problem tzv. *Low-Frequency Breakdown*-a se ne može ublažiti matričnom ekvilibracijom.)

Jedan od mogućih načina da se to postigne je da se prvo primeni ekvilibracija za izvore i integralne jednačine, čime se dobijaju matrice \mathbf{P}_1 i \mathbf{Q}_1 date sa (6.6), a potom primeni ekvilibracija za funkcije bazisa, čime se dobijaju matrice \mathbf{P}_2 i \mathbf{Q}_2 date sa (6.3). Obe ekvilibracije se mogu spojiti u jedinstvenu ekvilibraciju, datu matricama $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ i $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$. Ukoliko je druga ekvilibracija dijagonalno skaliranje koje se primenjuje na matrične jednačine dobivene prvom ekvilibracijom, rezultujuće matrice ekvilibracije \mathbf{P} i \mathbf{Q} su iste kao i u slučaju kada se samo druga ekvilibracija primenjuje na prvobitnu matricu. Dodatno, pokazuje se da primena ekvilibracije zasnovane na dijagonalnom skaliranju poboljšava kondicioni broj i konvergenciju iterativnog rešenja za slučaj visokog kontrasta karakteristika materijala (videti primer u sedmoj glavi).

Kako se ovakva ekvilibracija može veoma jednostavno primeniti na bilo koju postojeću MoM matričnu jednačinu, preporučljivo je upotrebiti je kao osnovni način za poboljšanje kondicionog broja MoM/SIE matrice i konvergencije odgovarajućeg iterativnog rešenja.

U slučaju dijagonalnog skaliranja ekvilibracija se vrši dijagonalnim matricama $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ čiji su dijagonalni elementi dati sa:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{|z_{ii}|}}. \quad (6.12)$$

Ukoliko su SIE adekvatno testirane, dijagonalni elementi tako uravnotežene MoM/SIE matrice su dominantni, čak i u slučaju kada se koriste funkcije bazisa višeg reda. Tada sve vrste i kolone imaju jediničnu beskonačnu normu (maksimalnu apsolutnu vrednost elemenata), što se generalno može dobiti primenom iterativnog postupka datog u [115]. Numerički testovi su pokazali da ovakva ekvilibracija nadmašuje: a) pojedinačnu ekvilibraciju vrsta, b) pojedinačnu ekvilibraciju kolona, i c) sukcesivnu kombinaciju ove dve, gde se najpre proračunaju faktori skaliranja za vrste, a potom faktori skaliranja za kolone, koristeći matricu sa skaliranim vrstama, kao kod *Lapack routine*-a [116]. (Videti primer u sedmoj glavi.)

S druge strane, euklidske norme vrsta/kolona matrične jednačine se mogu poprilično razlikovati, čak i nakon dijagonalnog skaliranja. U tom slučaju se može

primeniti dodatna ekvilibracija dijagonalnim matricama \mathbf{P} i \mathbf{Q} , čiji su dijagonalni elementi dati sa:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt[4]{\sum_{j=1}^N |z_{ij}|^2}}, \quad q_j = \frac{1}{\sqrt[4]{\sum_{i=1}^N |z_{ij}|^2}}. \quad (6.13)$$

Koeficijenti p_i su jednaki recipročnoj vrednosti kvadratnog korena norme-2 i -te vrste, dok su koeficijenti q_j jednaki recipročnoj vrednosti kvadratnog korena norme-2 j -te kolone. Numerički testovi su pokazali da ovakva ekvilibracija primenjena na MoM/SIE matrice dovodi do smanjenja kondicionog broja i poboljšanja konvergencije iterativnog rešenja samo ukoliko se primeni nakon dijagonalnog skaliranja. Stoga, takva kombinacija će se nadalje nazivati proširenim dijagonalnim skaliranjem. Pokazuje se da višestruka primena ovakve ekvilibracije ne rezultuje daljim poboljšanjima kondicionog broja i konvergencije.

Prošireno dijagonalno skaliranje se može obaviti na način kako je prethodno opisano u dva koraka ekvilibracije. U prvom koraku se matrice prekondicioniranja \mathbf{P}_1 i \mathbf{Q}_1 dobijaju na osnovu (6.12), dok se u drugom koraku matrice prekondicioniranja \mathbf{P}_2 i \mathbf{Q}_2 dobijaju na osnovu (6.13). Obe ekvilibracije se mogu spojiti u jedinstvenu ekvilibraciju koristeći matrice $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ i $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$, čiji su dijagonalni elementi dati sa:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt[4]{|z_{ii}| \sum_{j=1}^N \frac{|z_{ij}|^2}{|z_{jj}|}}}, \quad q_j = \frac{1}{\sqrt[4]{|z_{jj}| \sum_{i=1}^N \frac{|z_{ij}|^2}{|z_{ii}|}}}. \quad (6.14)$$

Ukoliko je matrica sistema simetrična, vektori koeficijenata \mathbf{p} i \mathbf{q} su jednaki, odnosno $p_i = q_j$ za $i = j$.

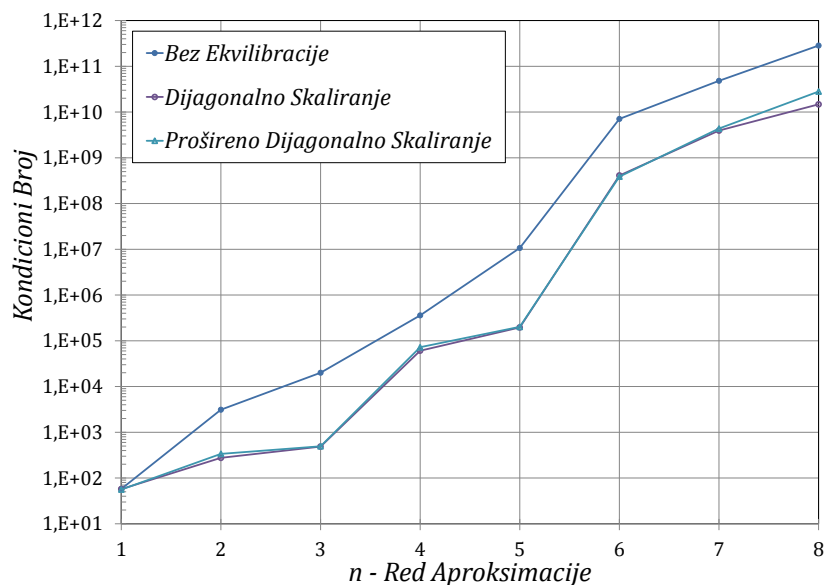
Pokazuje se da prošireno dijagonalno skaliranje rezultuje manjim kondicionim brojem i brojem iteracija u odnosu na dijagonalno skaliranje za slučaj simetričnih matrica koje se dobijaju pri MoM rešenju EFIE kod metalnih struktura [117]. Na primeru u sedmoj glavi će biti pokazano da isto važi ne samo za metalne strukture, već i u opštem slučaju, za kompozitne metalne i dielektrične strukture. U sledećem poglavlju će biti prikazani rezultati za kondicioni broj i broj iteracija pri rešavanju

problema triedarnog ugaonog reflektora razmatranog u poglavlju 3.6 uz primenu dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja.

6.5. Numerički primer: Kondicioni broj i broj iteracija modela triedarnog ugaonog reflektora uz primenu dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja

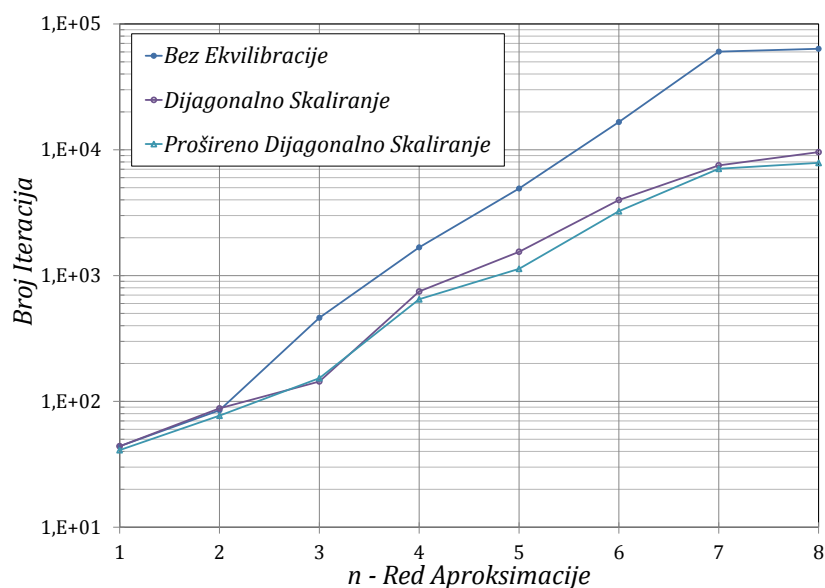
Posmatrajmo model triedarnog ugaonog reflektora kao u poglavlju 3.6 (Slika 3.1). Analiza rasejača se vrši MoM-om Galerkinovog tipa primenjenim na integralnu jednačinu električnog polja (EFIE), korišćenjem jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa višeg reda (HOBFs) i različitih redova aproksimacije. Opet, matrična jednačina se rešava iterativnom CG metodom (datom u poglavlju 3.3.1.2) sa relativnim ostatkom od 10^{-4} . Pre iterativnog rešavanja na matricu sistema se u jednom slučaju primenjuje dijagonalno skaliranje, odnosno prošireno dijagonalno skaliranje u drugom.

Na Slici 6.1 je prikazan kondicioni broj (uz korišćenje norme-2) za različite redove aproksimacije n i uz primenu dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja. Za potrebe poređenja je prikazan i kondicioni broj bez primene skaliranja, kao u poglavlju 3.6. Evidentno je blago smanjenje kondicionog broja za sve redove aproksimacije veće od prvog u odnosu na slučaj kada se skaliranje ne primenjuje. Kondicioni broj je moguće znatno više smanjiti primenom metoda koje će biti predstavljene u sedmoj i osmoj glavi.



Slika 6.1 Kondicioni broj matrice sistema (norma-2) za različite redove aproksimacije pri MoM/EFIE rešavanju modela triedarnog ugaonog reflektora uz korišćenje klasičnih funkcija bazisa višeg reda (HOBFs) i primenu dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja uz poređenje sa slučajem bez skaliranja.

Broj iteracija za različite redove aproksimacije n i uz primenu dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja je prikazan na Slici 6.2. Opet, za potrebe poređenja je prikazan i broj iteracija bez primene skaliranja. U skladu sa rezultatima za kondicioni broj evidentno je smanjenje broja iteracija u odnosu na slučaj bez skaliranja. Ovo smanjenje može biti znatno drastičnije, što će biti pokazano kroz numeričke primere u sedmoj i osmoj glavi.



Slika 6.2 Broj iteracija za različite redove aproksimacije pri MoM/EFIE rešavanju modela triedarnog ugaonog reflektora uz korišćenje klasičnih funkcija bazisa višeg reda (HOBFs) i primenu dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja uz poređenje sa slučajem bez skaliranja.

6.6. Rezime

Matrična ekvibracija predstavlja različite načine skaliranja vrsta i/ili kolona matrice koji imaju za cilj da smanje kondicioni broj matrice. To se postiže ujednačavanjem normi, u nekim slučajevima dijagonalnih elemenata, a u drugim normi vrsta i/ili kolona matrice. Na taj način se mogu ujednačiti različiti tipovi izvora, različite jednačine u sistemu površinskih integralnih jednačina, kao i različite funkcije bazisa i test funkcije. Dve izuzetno jednostavne forme matrične ekvibracije koje se baziraju samo na amplitudama matričnih elemenata su dijagonalno skaliranje i prošireno dijagonalno skaliranje. I pored njihove jednostavnosti one u određenoj meri mogu da smanje kondicioni broj matrice MoM sistema i broj iteracija iterativnog postupka, što je i demonstrirano na primeru triedarnog ugaonog reflektora. Dijagonalno skaliranje takođe predstavlja jednu od osnovnih komponenata novog postupka prekondicioniranja zasnovanog na linearnom kombinovanju vrsta i kolona koji će biti predstavljen u osmoj glavi.

7. Maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa

Potreba za što efikasnijim modelovanjem kompleksnih problema je usloвила razvoj više vrsta funkcija bazisa višeg reda. U ovoj glavi će biti prikazan jedan nov i jednostavan postupak izvođenja maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda polazeći od proizvoljnog tipa hijerarhijskih funkcija bazisa višeg reda. Postupak se zasniva na dvostepenoj Gram-Šmitovoj ortogonalizaciji, koja rezultuje jednostavnim rekurentnim izrazima za maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa višeg reda. Korišćenjem ovih izraza izračunati su i tabelirani koeficijenti koji pre svega omogućavaju brzu implementaciju ovih funkcija bazisa. Sem toga tabelirani su i koeficijenti koji omogućavaju konverziju razvoja maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa nižeg reda u razvoj višeg reda, ili u razvoj modifikovanih funkcija bazisa, što omogućava korišćenje postojećih brzih algoritama za post-procesiranje. Kroz nekoliko primera će biti demonstrirane prednosti upotrebe maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa u odnosu na druge vrste funkcija bazisa višeg reda, kao i mogućnosti njihovog kombinovanja sa metodama matrice ekvibracije, sve u kontekstu što efikasnijeg iterativnog rešavanja sistema jednačina koji se javljaju kao rezultat primene metode momenata na površinske integralne jednačine.

7.1. Tipovi funkcija bazisa višeg reda

Pored klasičnih (2.49) i modifikovanih (2.50) formi funkcija bazisa višeg reda mogu se dobiti i drugi oblici funkcija bazisa višeg reda zamenom stepenih funkcija polinomima istog reda [86]-[88], uz normalizaciju na vrednost ± 1 na krajevima intervala parametarske koordinate $[-1, 1]$. Uvođenje polinomskih funkcija umesto stepenih ima za posledicu kako povećanu kompleksnost novodobijenih funkcija bazisa u smislu praktične implementacije tako i produženje trajanja faza računanja koeficijenata matrice sistema i post-procesiranja (proračuna veličina u bliskoj i dalekoj zoni). Korišćenje polinomskih funkcija ne menja rešenje u odnosu na slučaj kada se koriste stepene funkcije, ali pruža dodatnu pogodnost u pogledu

smanjivanja kondicionog broja matrice sistema, a time i broja iteracija pri iterativnom rešavanju sistema, što je i praktično pokazano na primeru funkcija bazisa kod kojih se koriste Ležandrovi polinomi [87, 88].

Ukoliko se usvoji:

$$P_j(p) = L_j(p), \quad S_k(s) = \begin{cases} 1-s & k=0 \\ 1+s & k=1, \\ L_k(s) - L_{k-2}(s) & k \geq 2 \end{cases} \quad (7.1a,b)$$

gde su L_j i L_k Ležandrovi polinomi stepena j i k , respektivno, tada se govori o takozvanim skoro-ortogonalnim (near-ortho) funkcijama bazisa višeg reda.

7.2. Ortogonalnost funkcija bazisa

Primećeno je da MoM matrice imaju niži kondicioni broj ukoliko funkcije bazisa koje se koriste imaju viši stepen ortogonalnosti. Za funkcije bazisa \mathbf{F}_i i \mathbf{F}_j se kaže da su ortogonalne ukoliko je njihov unutrašnji proizvod jednak nuli, odnosno ukoliko važi:

$$\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \rangle = \int_{\Omega_m} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j d\Omega_m = 0, \quad i \neq j, \quad (7.2)$$

gde Ω_m predstavlja uniju oblasti definisanosti funkcija \mathbf{F}_i i \mathbf{F}_j koje su relevantne za proračune (delove domena u kojima ove funkcije imaju vrednosti različite od nule).

Kada ovaj uslov nije ispunjen, stepen njihove međusobne ortogonalnosti se može izraziti preko faktora ortogonalnosti, kao:

$$o_{ij} = \frac{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \rangle}{\|\mathbf{F}_i\| \cdot \|\mathbf{F}_j\|}, \quad (7.3)$$

gde je $\|\mathbf{F}_i\| = \sqrt{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_i \rangle}$ i $\|\mathbf{F}_j\| = \sqrt{\langle \mathbf{F}_j, \mathbf{F}_j \rangle}$. Funkcije bazisa se smatraju ortogonalnijim ukoliko imaju nižu vrednost faktora ortogonalnosti, o_{ij} . Minimalna vrednost ovog faktora je nula, čemu odgovara puna ortogonalnost posmatranog para funkcija bazisa, a maksimalna je jedan, kada su funkcije linearno zavisne.

Na osnovu (7.3), i imajući vidu (7.2), funkcije bazisa koje su definisane na različitim elementima (i samim tim imaju disjunktne oblasti u kojima su njihove vrednosti različite od nule) su potpuno ortogonalne, dok se za funkcije bazisa definisane na istom elementu dobija:

$$\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \rangle = \int_{\omega_m} \frac{\mathbf{a}_{s_i} \cdot \mathbf{a}_{s_j}}{J_m} f_i \cdot f_j d\omega_m, \quad i \neq j. \quad (7.4)$$

Kada su unitarni vektori konstantni nad elementom, u prvom koraku se uslov ortogonalnosti za (7.4) svodi na:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{\omega_m} f_i f_j d\omega_m = 0, \quad i \neq j. \quad (7.5)$$

U drugom koraku ortogonalnost f -funkcija se razdvaja na ortogonalnost P -funkcija i ortogonalnost S -funkcija, odnosno:

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_{-1}^1 P_i(p) P_j(p) dp = 0, \quad i, j = 0, \dots, n_p, \quad i \neq j, \quad (7.6a)$$

$$\langle S_i, S_j \rangle = \int_{-1}^1 S_i(s) S_j(s) ds = 0, \quad i, j = 0, \dots, n_s, \quad i \neq j. \quad (7.6b)$$

Uslov ortogonalnosti P -funkcija se može zadovoljiti usvajanjem raznih polinomijalnih funkcija, između ostalog i Ležandrovih polinoma (videti *Prilog B*):

$$P_i(p) = L_i(p) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dp^i} (p^2 - 1)^i. \quad (7.7)$$

Na intervalu $[-1, 1]$ njihova maksimalna apsolutna vrednost je jedan, i to na krajevima intervala, $|P_i(\pm 1)| = 1$, i važi:

$$\|P_i\|^2 = \langle P_i, P_i \rangle = \int_{-1}^1 P_i^2(p) dp = \frac{2}{2i + 1}. \quad (7.8)$$

Potpunu ortogonalnost S -funkcija nije moguće ostvariti u smislu uslova (7.6b) zbog zahteva da samo S_0 ima vrednost različitu od nule za $s = -1$ i samo S_1 ima vrednost različitu od nule za $s = 1$. Maksimalna ortogonalnost koja se može postići je da je (7.6b) zadovoljeno za sve parove S -funkcija, osim za $\langle S_0, S_1 \rangle$. Ovako definisane S -funkcije se nazivaju maksimalno ortogonalizovanim (max-ortho) S -funkcijama.

Funkcije bazisa višeg reda kod kojih su P -funkcije potpuno ortogonalne i S -funkcije maksimalno ortogonalizovane se nazivaju maksimalno ortogonalizovanim (max-ortho) funkcijama bazisa višeg reda. Izrazi za maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa u slučaju generalizovanih heksaedarnih elemenata su dati u *Prilogu C*. Ukoliko su unitarni vektori elementa međusobno normalni tada su i maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa koje pripadaju različitim redovima aproksimacija takođe potpuno ortogonalne. Smanjenjem ortogonalnosti unitarnih vektora elementa ili povećanjem njihovog odstupanja u odnosu na konstante dolazi do smanjenja ortogonalnosti maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa koje pripadaju različitim redovima aproksimacija na datom elementu.

7.3. Razvoj maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa Gram-Šmitovim postupkom u dve faze

Maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa se mogu izvesti polazeći od proizvoljnog skupa hijerarhijskih S -funkcija. Kako bi se razlikovale od polaznog skupa S -funkcija, maksimalno ortogonalizovane funkcije će biti označene kao Q -funkcije, ili Q -polinomi.

Q -polinomi se mogu odrediti ili rešavanjem sistema jednačina za svaki zadati red aproksimacije [89] ili korišćenjem vrednosti za niže redove aproksimacije. Pristup u kome se koriste vrednosti koje su dobijene za red aproksimacije za jedan manji od posmatranog se sastoji od dve faze. Njime se kao nusproizvod pritom dobijaju i C -koeficijenti, preko kojih se Q -funkcije mogu izraziti pomoću S -funkcija i koji su veoma pogodni za primenu u post-procesiranju uz korišćenje već postojećih algoritama zasnovanih na S -funkcijama.

U prvoj fazi se međusobno ortogonalizuju sve singletne funkcije bazisa, dok se u drugoj fazi ortogonalizuju obe dubletne funkcije bazisa za dati red aproksimacije sa svim singletnim funkcijama bazisa (dobijenim u prvoj fazi).

Prva faza:

Singletna funkcija bazisa, Q_j , se može predstaviti kao zbir funkcije S_j i linearne kombinacije svih singletnih Q -funkcija nižeg reda ponderisanih koeficijentima D_{jk} kao:

$$Q_j(s) = \begin{cases} S_2(s) & j=2 \\ S_j(s) + \sum_{k=2}^{j-1} D_{jk} Q_k(s) & j=3, \dots, n_s \end{cases} \quad (7.9)$$

Tako se za hijerarhijske S -funkcije dobija da su i singletne Q -funkcije takođe hijerarhijske, odnosno da ne zavise od reda aproksimacije n_s .

Oblik (7.9) je izuzetno pogodan za određivanje koeficijenata D_{jk} , uz korišćenje (pretpostavljenog) svojstva ortogonalnosti odgovarajućih Q -funkcija. Ovi koeficijenti se određuju sukcesivno, počev od $j=3$ do $j=n_s$. U j -tom koraku se prema (7.6b) zahteva da je funkcija Q_j ortogonalna sa svakom od funkcija Q_i , $2 \leq i < j$. Na taj način se dobija sistem od $j-2$ jednačine po nepoznatim koeficijentima D_{jk} u obliku:

$$\langle S_j, Q_i \rangle + \sum_{k=2}^{j-1} D_{jk} \langle Q_k, Q_i \rangle = 0, \quad i = 2, \dots, j-1. \quad (7.10)$$

Kako je, po pretpostavci, $\langle Q_k, Q_i \rangle = 0$ za svako $k \neq i$, koeficijent D_{jk} se dobija direktno kao:

$$D_{jk} = -\frac{\langle S_j, Q_k \rangle}{\langle Q_k, Q_k \rangle}, \quad j = 3, \dots, n_s, \quad k = 2, \dots, j-1. \quad (7.11)$$

Druga faza:

Sada se dubletne funkcije bazisa predstavljaju preko zbira odgovarajuće dubletne funkcije S_j i linearne kombinacije svih singletnih Q -funkcija za dati red aproksimacije n_s , ponderisanih koeficijentima D_{jk} kao:

$$Q_j^{n_s}(s) = S_j(s) + \sum_{k=2}^{n_s} D_{jk} Q_k(s), \quad j = 0, 1. \quad (7.12)$$

Na osnovu (7.12) je evidentno da dubletne Q -funkcije imaju različitu formu za različite redove aproksimacije n_s , tako da nisu hijerarhijske.

Koeficijenti D_{jk} se za $j = 0,1$ određuju kao i u prvoj fazi, za svako j i n_s , prema (7.6b), zahtevajući da je funkcija $Q_j^{n_s}$ ortogonalna sa svakom od funkcija Q_i , $2 \leq i \leq n_s$. Tako se dobija sistem od $n_s - 1$ jednačina po nepoznatim koeficijentima D_{jk} u obliku:

$$\langle S_j, Q_i \rangle + \sum_{k=2}^{n_s} D_{jk} \langle Q_k, Q_i \rangle = 0, \quad j = 0,1, \quad i = 2, \dots, n_s. \quad (7.13)$$

Kako je, po pretpostavci, $\langle Q_k, Q_i \rangle = 0$ za svako $k \neq i$, koeficijent D_{jk} se dobija direktno kao:

$$D_{jk} = -\frac{\langle S_j, Q_k \rangle}{\langle Q_k, Q_k \rangle}, \quad j = 0,1, \quad k = 2, \dots, n_s. \quad (7.14)$$

Primećuje se, na osnovu (7.14), da koeficijenti D_{jk} za $j = 0,1$ ne zavise od reda aproksimacije n_s .

Za različite polazne skupove S -funkcija polinomijalnog tipa se prethodno opisanim postupkom u dve faze dobijaju skupovi Q -funkcija koji se razlikuju samo po multiplikativnim konstantama za singletne funkcije bazisa.

Ovako usvojeni i izračunati D -koeficijenti omogućavaju neke od funkcionalnosti koje su prisutne kod hijerarhijskih funkcija bazisa. Tako je kod hijerarhijskih funkcija bazisa moguće, kada rešenje MoM matricne jednačine nije dovoljno dobro, povećati redove aproksimacija na određenim elementima i iskoristiti već dobijeno rešenje i matricu koeficijenata. U tom slučaju se matrica sistema dopunjava novim vrstama i kolonama zbog dodavanja novih funkcija bazisa, a postojeće rešenje jednostavno proširuje nultim vrednostima za nove funkcije bazisa i takvo koristi kao početna aproksimacija novog sistema. Kod hijerarhijskih funkcija bazisa je implementacija opisane funkcionalnosti trivijalna, a istu funkcionalnost je moguće postići i kod maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda. Tada je, zbog (7.12), pored dodavanja novih vrsta i kolona matrici sistema, potrebno takođe iskoristiti novododate vrste i kolone za izmenu već postojećih elemenata matrice koji odgovaraju dubletnim funkcijama bazisa. Sa druge strane, pri "proširenju" početnog rešenja za potrebe predstavljanja u formi rešenja proširenog

sistema se polazi od identične polinomijalne forme rešenja u novom i originalnom sistemu.

Ako posmatramo raspodelu struje duž generalizovane žice, za redove aproksimacije n_s i $n_s + 1$, iz uslova jednakosti struje:

$$I(s)\mathbf{i}_s = \frac{\mathbf{a}_s}{J_1} \sum_{j=0}^{n_s+1} b_j^{n_s+1} Q_j^{n_s+1}(s) = \frac{\mathbf{a}_s}{J_1} \sum_{j=0}^{n_s} b_j^{n_s} Q_j^{n_s}(s), \quad (7.15)$$

dobija se sledeća veza između “starih” i “novih” koeficijenata:

$$b_j^{n_s+1} = \begin{cases} b_j^{n_s} & j = 0, \dots, n_s \\ -b_0^{n_s} D_{0, n_s+1} - b_1^{n_s} D_{1, n_s+1} & j = n_s + 1 \end{cases}. \quad (7.16)$$

U opštem slučaju, pored preuzimanja vrednosti za koeficijente iz osnovnog rešenja, takođe dolazi do izmene početnog rešenja (0) za singletne funkcije, svih redova aproksimacije većih od inicijalnog, a na osnovu rešenja za dubletne funkcije bazisa (za oba elementa nad kojima je definisana) i odgovarajućih D -koeficijenata. Sličan postupak se može primeniti i kod elemenata sa dve parametarske koordinate (četvorouglovi).

Ukoliko se za S -funkcije usvoje iste funkcije kao kod skoro-ortogonalnih funkcija bazisa višeg reda, izrazi za D -koeficijente se mogu uprostiti. Zbog svojstva parnosti/neparnosti, odgovarajuće Q -funkcije se mogu izraziti kao linearne kombinacije ili parnih ili neparnih Ležandrovih polinoma ([] - ceo deo):

$$Q_k = L_k + \sum_{i=1}^{[k/2]} p_i L_{k-2i}. \quad (7.17)$$

Na osnovu (7.17) i (7.1) unutrašnji proizvod singletnih funkcija bazisa se može napisati u obliku:

$$\langle S_j, Q_k \rangle = \langle L_j, L_k \rangle - \langle L_{j-2}, L_k \rangle + \sum_{i=1}^{[k/2]} p_i \langle L_j - L_{j-2}, L_{k-2i} \rangle. \quad (7.18)$$

Kako je u (7.11) $k < j$, prvi član i suma na desnoj strani (7.18) su uvek jednaki nuli. Drugi član je različit od nule samo za $k = j - 2$, tako da imamo:

$$\langle S_j, Q_{j-2} \rangle = -\langle L_{j-2}, L_{j-2} \rangle. \quad (7.19)$$

Sledi da su u razvoju (7.9) samo koeficijenti $D_{j,j-2}$, $j > 3$, različiti od nule. Zamenom (7.19) u (7.11) i koristeći (7.8) dobijamo:

$$D_{j,j-2} = \frac{2}{2j-3} \cdot \frac{1}{\langle Q_{j-2}, Q_{j-2} \rangle}, \quad j = 4, \dots, n_s, \quad (7.20)$$

odnosno:

$$Q_j(s) = \begin{cases} L_2(s) - L_0(s) & j = 2 \\ L_3(s) - L_1(s) & j = 3 \\ L_j(s) - L_{j-2}(s) + D_{j,j-2}Q_{j-2}(s) & j = 4, \dots, n_s \end{cases} \quad (7.21)$$

Koeficijenti D_{jk} , za $j = 0, \dots, 8$ i $k = 2, \dots, 8$ su dati u Tabeli 7.1. Koristeći (7.21) i (7.12) sa D -koeficijentima iz Tabele 7.1 i funkcijama S_0 i S_1 datim u (7.1) mogu se lako dobiti odgovarajuće Q -funkcije izražene preko Ležandrovih polinoma. One su date u Tabeli 7.2 i Tabeli 7.3 za redove aproksimacije do $n_s = 8$.

Tabela 7.1 Koeficijenti D_{jk} , za redove aproksimacije do $n_s = 8$, kojima je omogućeno predstavljanje Q -funkcija preko maksimalno ortogonalizovanih S -funkcija i Q -funkcija nižeg reda na osnovu (7.9) i (7.12).

$j \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8
0/1	5/6	* \mp 7/10	3/5	\mp 11/21	13/28	\mp 5/12	17/45
2							
3							
4	1/6						
5		3/10					
6			2/5				
7				10/21			
8					15/28		

* - gornji znak odgovara $j = 0$, dok donji odgovara $j = 1$

(važi za sva pojavljivanja u tabeli)

Tabela 7.2 Singletne Q -funkcije predstavljene preko Ležandrovih polinoma.

j	$Q_j(s)$
2	$L_2 - L_0$
3	$L_3 - L_1$
4	$(6L_4 - 5L_2 - L_0)/6$
5	$(10L_5 - 7L_3 - 3L_1)/10$
6	$(15L_6 - 9L_4 - 5L_2 - L_0)/15$
7	$(21L_7 - 11L_5 - 7L_3 - 3L_1)/21$
8	$(28L_8 - 13L_6 - 9L_4 - 5L_2 - L_0)/28$

Tabela 7.3 Dubletne Q -funkcije predstavljene preko Ležandrovih polinoma.

n_s	$Q_0^{n_s}(s), Q_1^{n_s}(s)$
1	$*\mp L_1 + L_0$
2	$\frac{5}{6}L_2 \mp L_1 + \frac{1}{6}L_0$
3	$\mp \frac{7}{10}L_3 + \frac{5}{6}L_2 \mp \frac{3}{10}L_1 + \frac{1}{6}L_0$
4	$\frac{3}{5}L_4 \mp \frac{7}{10}L_3 + \frac{1}{3}L_2 \mp \frac{3}{10}L_1 + \frac{1}{15}L_0$
5	$\mp \frac{11}{21}L_5 + \frac{3}{5}L_4 \mp \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{3}L_2 \mp \frac{1}{7}L_1 + \frac{1}{15}L_0$
6	$\frac{13}{28}L_6 \mp \frac{11}{21}L_5 + \frac{9}{28}L_4 \mp \frac{1}{3}L_3 + \frac{5}{28}L_2 \mp \frac{1}{7}L_1 + \frac{1}{28}L_0$
7	$\mp \frac{5}{12}L_7 + \frac{13}{28}L_6 \mp \frac{11}{36}L_5 + \frac{9}{28}L_4 \mp \frac{7}{36}L_3 + \frac{5}{28}L_2 \mp \frac{1}{12}L_1 + \frac{1}{28}L_0$
8	$\frac{17}{45}L_8 \mp \frac{5}{12}L_7 + \frac{13}{45}L_6 \mp \frac{11}{36}L_5 + \frac{1}{5}L_4 \mp \frac{7}{36}L_3 + \frac{1}{9}L_2 \mp \frac{1}{12}L_1 + \frac{1}{45}L_0$

* - gornji znak odgovara Q_0 , dok donji odgovara Q_1

(važi za sva pojavljivanja u tabeli)

Izražavanje Q -funkcija preko Ležandrovih polinoma umesto preko polinoma po s može imati još neke poželjne osobine kod praktične implementacije. Kod predstavljanja preko polinoma po s , za četvorougaoone elemente, računanje struja se obavlja preko dvostruke sume stepenih funkcija, a računanje elemenata MoM

matrice preko četverostrukih suma stepenih funkcija. Ukoliko se koriste Ležandrovi polinomi za predstavljanje odgovarajućih funkcija onda se ove sume svode na jednostruke i dvostruke sume Ležandrovih polinoma, respektivno. Zahvaljujući Boneovoj rekurentnoj formuli (videti *Prilog B*), računanje Ležandrovih polinoma je tek nešto malo zahtevnije u odnosu na stepene funkcije. Uz (7.21) za singletne funkcije bazisa imamo samo po dva ili tri člana u odgovarajućim izrazima.

7.4. Osnovni oblik Q -funkcija i faktori skaliranja

Bez obzira da li se polazi od jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa višeg reda, modifikovanih funkcija bazisa višeg reda, ili skoro-ortogonalnih funkcija bazisa višeg reda kao S -funkcija dobijaju se Q -funkcije koje se razlikuju jedino u multiplikativnom faktoru za singletne funkcije bazisa. Ovi faktori se mogu birati na različite načine, uz uslov da funkcije bazisa definisane nad parovima susednih elemenata koje se kombinuju u dublete moraju imati iste multiplikativne konstante.

Q -funkcije se tipično mogu skalirati na tri načina. Kod prvog načina svaki singlet se normalizuje apsolutnom vrednošću težinskog koeficijenta člana najnižeg stepena, dok dubleti ostaju nepromenjeni. Tako dobijeni skupovi singleta i dubleta su dati u Tabeli 7.4 i Tabeli 7.5, respektivno. Evidentno je da je u ovom slučaju većina koeficijenata celobrojna, sa svega nekoliko razlomaka, što je pogodno za praktičnu implementaciju, pa će stoga ovakav skup bio označen kao osnovni oblik maksimalno ortogonalizovanih funkcija.

Dalje, Q -funkcije se mogu normalizovati na jediničnu maksimalnu apsolutnu vrednost, što će u nastavku teksta biti označeno kao normalizacija na ± 1 , ili skraćeno $\text{norm } \pm 1$. Ovaj način je pogodan za grafički prikaz singleta i dubleta, pa su oni upravo u ovoj formi prikazani na Slici 7.1 i Slici 7.2, respektivno i označeni kao normalizovani na ± 1 .

Najzad, može se euklidska norma funkcija postaviti na jediničnu, i u tom slučaju se svaka funkcija u osnovnom obliku normalizuje normom iste [113]. Pokazuje se da ovaj oblik obezbeđuje nešto bržu konvergenciju kod iterativnog rešavanja MoM problema u odnosu na druga dva oblika, ali je ova forma skaliranja praktično

primenljiva samo u slučaju kada je za sve dublete u sistemu usvojen isti stepen aproksimacije n_s . Q -funkcije u ovom obliku će biti označene kao euklidske.

U Tabeli 7.6 dati su faktori skaliranja uz čiju se primenu na osnovni oblik singleta Q -funkcija dat u Tabeli 7.4 dobijaju drugi oblici. Koristeći faktore iz Tabele 7.7 i osnovni oblik dubleta dat u Tabeli 7.5 dobija se euklidski oblik dubleta. Klasična i skoro-ortogonalizovana forma dubleta je ista kao osnovna, dok je za normalizaciju na ± 1 potrebno primeniti faktor $1/2$ na osnovnu formu.

Tabela 7.4 Singletne Q -funkcije.

j	$Q_j(s)$
2	$s^2 - 1$
3	$s^3 - s$
4	$7s^4 - 8s^2 + 1$
5	$3s^5 - 4s^3 + s$
6	$33s^6 - 51s^4 + 19s^2 - 1$
7	$\frac{143}{15}s^7 - \frac{253}{15}s^5 + \frac{25}{3}s^3 - s$
8	$143s^8 - 286s^6 + 176s^4 - 34s^2 + 1$

Tabela 7.5 Dubletne Q -funkcije.

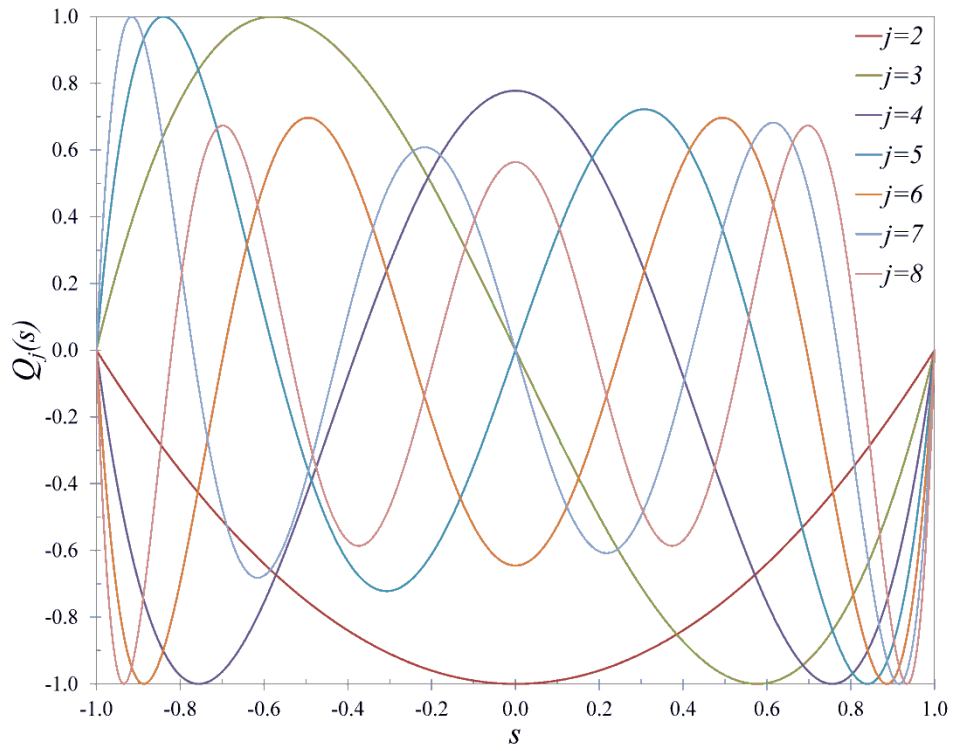
n_s	$Q_0^{n_s}(s), Q_1^{n_s}(s)$
1	$1 \mp s$
2	$(5s^2 \mp 4s - 1)/4$
3	$(\mp 7s^3 + 5s^2 \pm 3s - 1)/4$
4	$(21s^4 \mp 14s^3 - 14s^2 \pm 6s + 1)/8$
5	$(\mp 33s^5 + 21s^4 \pm 30s^3 - 14s^2 \mp 5s + 1)/8$
6	$\frac{5}{64} \left(\frac{429}{5} s^6 \mp \frac{264}{5} s^5 - 99s^4 \pm 48s^3 + 27s^2 \mp 8s - 1 \right)$
7	$\frac{5}{64} \left(\mp 143s^7 + \frac{429}{5} s^6 \pm \frac{1001}{5} s^5 - 99s^4 \mp 77s^3 + 27s^2 \pm 7s - 1 \right)$
8	$\frac{7}{128} \left(\frac{2431}{7} s^8 \mp \frac{1430}{7} s^7 - 572s^6 \pm 286s + 286s^4 \mp 110s^3 - 44s^2 \pm 10s + 1 \right)$

Tabela 7.6 Faktori skaliranja za singletne Q -funkcije.

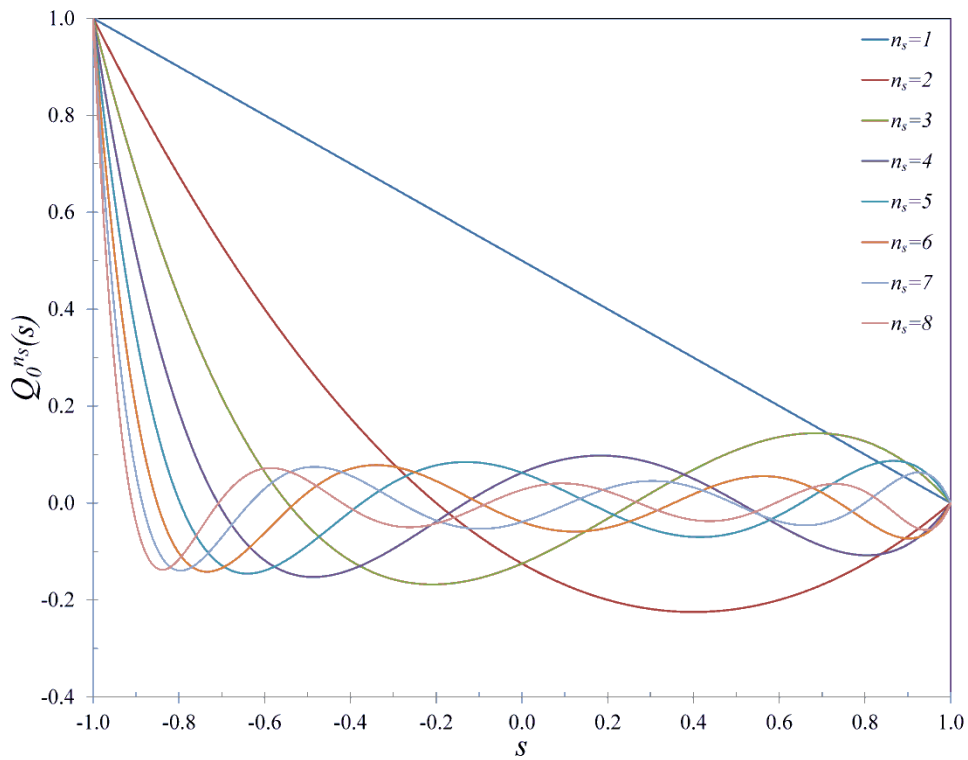
j	<i>Klasične</i> S	<i>Skoro-ortogonalne</i> S	<i>Normalizovane</i> $na \pm 1$	<i>Euklidske</i>
2	1	3/2	1,0000	0,9682
3	1	5/2	2,5981	2,5617
4	1/7	5/8	0,7778	0,8385
5	1/3	21/8	3,6208	4,2482
6	1/33	7/16	0,6455	0,8164
7	15/143	45/16	4,3521	5,8828
8	1/143	45/128	0,5637	0,8085

Tabela 7.7 Euklidski faktori skaliranja za dubletne Q -funkcije.

n_s	1	2	3	4	5	6	7	8
Faktor	0,6125	1,0000	1,3693	1,7321	2,0917	2,4495	2,8063	3,1623



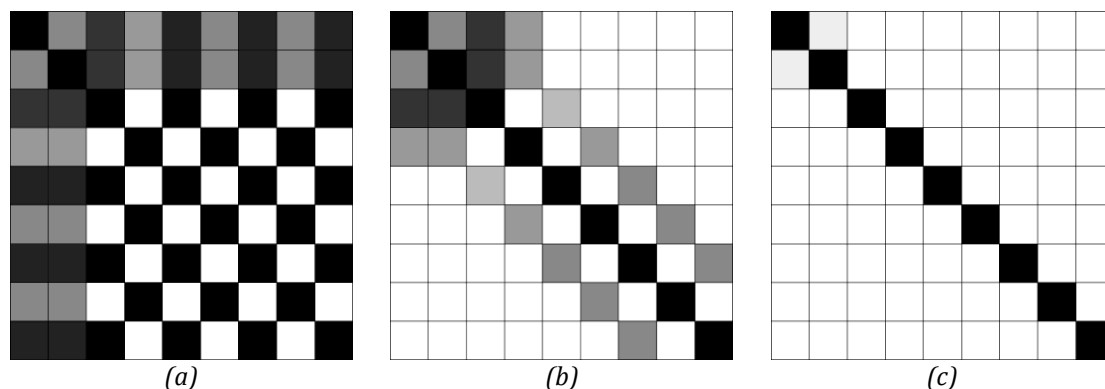
Slika 7.1 Singletne Q-funkcije, normalizovane na ± 1 .



Slika 7.2 Dubletne Q-funkcije, normalizovane na ± 1 .

7.5. Ortogonalnost klasičnih, skoro-ortogonalnih i maksimalno ortogonalizovanih S -funkcija

Faktori ortogonalnosti S -funkcija klasičnih, skoro-ortogonalnih i maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda su prikazani na Slici 7.3, za red aproksimacije $n = 8$.



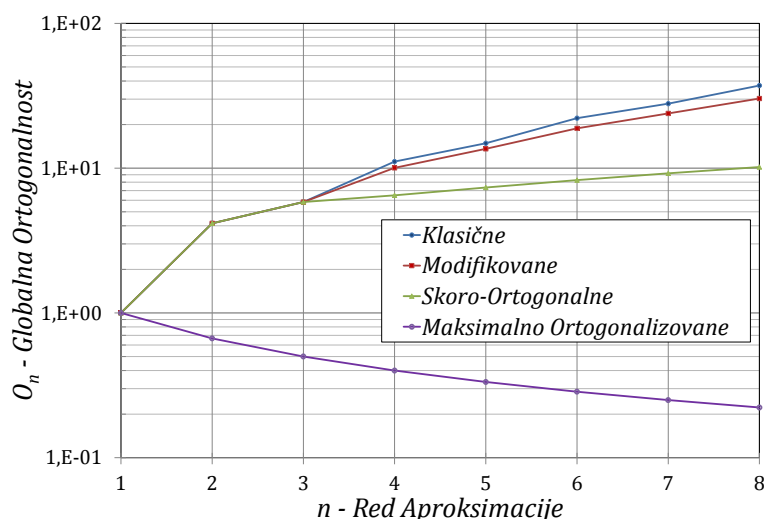
Slika 7.3 Faktor ortogonalnosti: a) klasičnih, b) skoro-ortogonalnih, c) maksimalno ortogonalizovanih S -funkcija.

Polje u preseku i -te vrste i j -te kolone predstavlja faktor ortogonalnosti i -te i j -te S -funkcije. Prva i druga vrsta/kolona odgovaraju dubletima, a preostale vrste/kolone singletima (treća vrsta/kolona odgovara singletu drugog reda, četvrta vrsta/kolona odgovara singletu trećeg reda i tako dalje). Vrednosti faktora ortogonalnosti su predstavljene različitim nivoima sive, od bele do potpuno crne boje, koje odgovaraju vrednostima za faktor ortogonalnosti od nule do jedinice, respektivno. Maksimalno ortogonalizovane S -funkcije imaju znatno veći stepen ortogonalnosti od skoro-ortogonalnih S -funkcija, a takođe i skoro-ortogonalne S -funkcije imaju znatno veći stepen ortogonalnosti u poređenju sa klasičnim S -funkcijama. Kod maksimalno ortogonalizovanih S -funkcija jedine funkcije koje nisu međusobno ortogonalne su dubleti, ali je njihov faktor ortogonalnosti veoma nizak.

Ukoliko se globalna ortogonalnost S -funkcija skupa funkcija bazisa višeg reda definiše kao:

$$O_n = \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n |o_{ij}^{(n)}|, \quad (7.22)$$

gde se $o_{ij}^{(n)}$ računa prema (7.3) a n je red aproksimacije koji se posmatra, tada se različiti tipovi funkcija bazisa višeg reda mogu međusobno porediti po kriterijumu ortogonalnosti. Na Slici 7.4 prikazana je globalna ortogonalnost O_n za različite skupove S -funkcija (klasične, modifikovane, skoro-ortogonalne i maksimalno ortogonalizovane) u funkciji reda aproksimacije n .



Slika 7.4 Globalna ortogonalnost u zavisnosti od reda aproksimacije: a) klasičnih, b) modifikovanih, c) skoro-ortogonalnih, i d) maksimalno ortogonalizovanih S -funkcija.

Može se primetiti da je O_n mnogo veća kod klasičnih, modifikovanih i skoro-ortogonalnih S -funkcija u odnosu na maksimalno ortogonalizovane i da monotono raste sa porastom reda aproksimacije n . Takođe, za vrednosti $n = 1, 2, 3$ S -funkcije kod ova tri tipa funkcija su identične, pa otuda i ista O_n . Nasuprot tome, O_n kod maksimalno ortogonalizovanih S -funkcija monotono opada sa porastom n , što je uslovljeno činjenicom da je kod njih $O_n = 2o_{01}^{(n)}$, a pritom sam $o_{01}^{(n)}$ opada sa porastom n .

7.6. Post-procesiranje rezultata dobijenih primenom maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa preko algoritama za druge tipove funkcija bazisa višeg reda

Singletne Q -funkcije (singletne S -funkcije maksimalno ortogonalizovanih funkcija) se mogu predstaviti kao linearne kombinacije S -funkcija modifikovanih funkcija bazisa čijom su ortogonalizacijom i dobijeni, preko odgovarajućih koeficijenata C_{jk} kao:

$$Q_j(s) = \begin{cases} S_2(s) & j = 2 \\ S_j(s) + \sum_{k=2}^{j-1} C_{jk} S_k(s) & j = 3, \dots, n_s \end{cases} \quad (7.23)$$

Slično, dubletne Q -funkcije (dubletne S -funkcije maksimalno ortogonalizovanih funkcija) se mogu predstaviti kao linearne kombinacije dubletnih S -funkcija i svih singletnih S -funkcija modifikovanih funkcija bazisa na osnovu kojih su izvedene, preko odgovarajućih koeficijenata $C_{jk}^{n_s}$ kao:

$$Q_j^{n_s}(s) = S_j(s) + \sum_{k=2}^{n_s} C_{jk}^{n_s} S_k(s), \quad j = 0, 1. \quad (7.24)$$

Ovi koeficijenti se mogu iskoristiti i pri samom izvođenju Q -funkcija, u kom slučaju se rešava nešto složeniji sistem jednačina u poređenju sa pristupom preko D -koeficijenata [89]. Međutim, praktični značaj ovih koeficijenta leži u mogućnosti da se razvoj za struje izražen preko maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa transformiše u razvoj izražen preko klasičnih ili modifikovanih funkcija bazisa, koje omogućavaju mnogo lakše i brže post-procesiranje. Koeficijenti $C_{jk}^{n_s}$, $j = 0, 1$ i C_{jk} , $j = 2, \dots, n_s$ za slučaj modifikovanih S -funkcija su dati u Tabeli 7.8 i Tabeli 7.9, respektivno. Zbog parnosti/neparnosti koja se održava ortogonalizacijom S -funkcija u Q -funkcije koeficijenti $C_{jk}^{n_s}$ za $j = 0$ i $j = 1$ imaju suprotan predznak za neparne vrednosti k , dok je kod C_{jk} svaki drugi koeficijent jednak nuli.

Tabela 7.8 C-koeficijenti za redove aproksimacije do $n_s = 8$, kojima je omogućeno predstavljanje Q -funkcija preko modifikovanih S -funkcija.

$$C_{jk}^{n_s}, j = 0, 1$$

$n_s \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8
2	$\frac{5}{4}$						
3	$\frac{5}{4}$	$\frac{* \mp 7}{4}$					
4	$\frac{7}{8}$	$\frac{\mp 7}{4}$	$\frac{21}{8}$				
5	$\frac{7}{8}$	$\frac{\mp 3}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{\mp 33}{8}$			
6	$\frac{69}{64}$	$\frac{\mp 3}{8}$	$\frac{-33}{32}$	$\frac{\mp 33}{8}$	$\frac{429}{64}$		
7	$\frac{69}{64}$	$\frac{\mp 99}{64}$	$\frac{-33}{32}$	$\frac{\pm 143}{32}$	$\frac{429}{64}$	$\frac{\mp 715}{64}$	
8	$\frac{121}{128}$	$\frac{\mp 99}{64}$	$\frac{429}{128}$	$\frac{\pm 143}{32}$	$\frac{-1573}{128}$	$\frac{\mp 715}{64}$	$\frac{2431}{128}$

* - gornji znak odgovara $j = 0$, dok donji odgovara $j = 1$

(važi za sva pojavljivanja u tabeli)

Tabela 7.9 C-koeficijenti za redove aproksimacije do $n_s = 8$, kojima je omogućeno predstavljanje Q -funkcija preko modifikovanih S -funkcija.

$$C_{jk}$$

$j \setminus k$	2	3	4	5	6	7
3						
4	$-\frac{1}{7}$					
5		$-\frac{1}{3}$				
6	$\frac{1}{33}$		$-\frac{6}{11}$			
7		$\frac{15}{143}$		$-\frac{10}{13}$		
8	$-\frac{1}{143}$		$\frac{3}{13}$		1	

Kako se od razvoja za struje izraženog preko maksimalnog ortogonalizovanih funkcija bazisa dobija razvoj za struje izražen preko modifikovanih funkcija bazisa biće ilustrovano na primeru raspodele struje duž generalizovane žice. Iz uslova jednakosti ova dva razvoja:

$$I(s) \mathbf{i}_s = \frac{\mathbf{a}_s}{J_1} \sum_{k=0}^{n_s} a_k S_k(s) = \frac{\mathbf{a}_s}{J_1} \sum_{j=0}^{n_s} b_j Q_j^{n_s}(s), \quad (7.25)$$

a na osnovu (7.23) i (7.24), nepoznate koeficijente a_k , $k = 0, \dots, n_s$, možemo dobiti kao linearnu kombinaciju koeficijenata b_j , $j = 0, \dots, n_s$, ponderisanih C -koeficijentima preko:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 \\ &\dots \\ a_k &= C_{0k}^{n_s} b_0 + C_{1k}^{n_s} b_1 + b_k + \sum_{j=k+1}^{n_s} C_{jk} b_j \end{aligned} \quad (7.26)$$

Sličan postupak se može primeniti i kod elemenata sa dve parametarske koordinate (četvorouglovi).

7.7. Numerički primeri

Svi proračuni su rađeni u *software*-skom paketu WIPL-D Pro v10.0 [118]. Za potrebe simulacija korišćene su površinske integralne jednačine i to EFIE za metalne i PMCHWT za dielektrične strukture. Nepoznate površinske gustine struja se predstavljaju preko klasičnih, skoro-ortogonalnih i maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda koje su definisane duž žica i nad četvorouglovima. Najveća veličina elementa koja se koristi je 2λ i za nju je usvojen red aproksimacije $n = 7$. Elementi veći od 2λ se automatski segmentišu na minimalan broj manjih elemenata koji su manji od zadate veličine. Matrična jednačina koja se dobija primenom metode momenata se rešava CG metodom (datom u poglavlju 3.3.1.2) sa relativnim ostatkom od 10^{-4} .

7.7.1. Triedarni ugaoni reflektor

Posmatrajmo triedarni ugaoni reflektor razmatran kao numerički primer u poglavlju 3.6.1 treće glave (Slika 3.1). Na Slici 7.5 je prikazan kondicioni broj matrice sistema u zavisnosti od usvojenog reda aproksimacije za MoM/EFIE rešenje sistema. Pored jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa višeg reda korišćene su i skoro-ortogonalne i maksimalno ortogonalizovane funkcija bazisa uz primenu nekoliko strategija skaliranja.

Za sve tipove funkcija bazisa najniži kondicioni broj se postiže korišćenjem euklidskog ili proširenog dijagonalnog skaliranja (uz nešto veći kondicioni broj kod dijagonalnog skaliranja).

Primena skoro-ortogonalnih funkcija bazisa višeg reda rezultuje znatno manjim kondicionim brojem matrice sistema u odnosu na klasične funkcije bazisa višeg reda, kao što i primena maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda rezultuje znatno manjim kondicionim brojem matrice sistema u odnosu na skoro-ortogonalne funkcije bazisa višeg reda.

Samo u slučaju maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda u kombinaciji sa euklidskim ili proširenim dijagonalnim skaliranjem kondicioni broj praktično ne zavisi od reda aproksimacije.

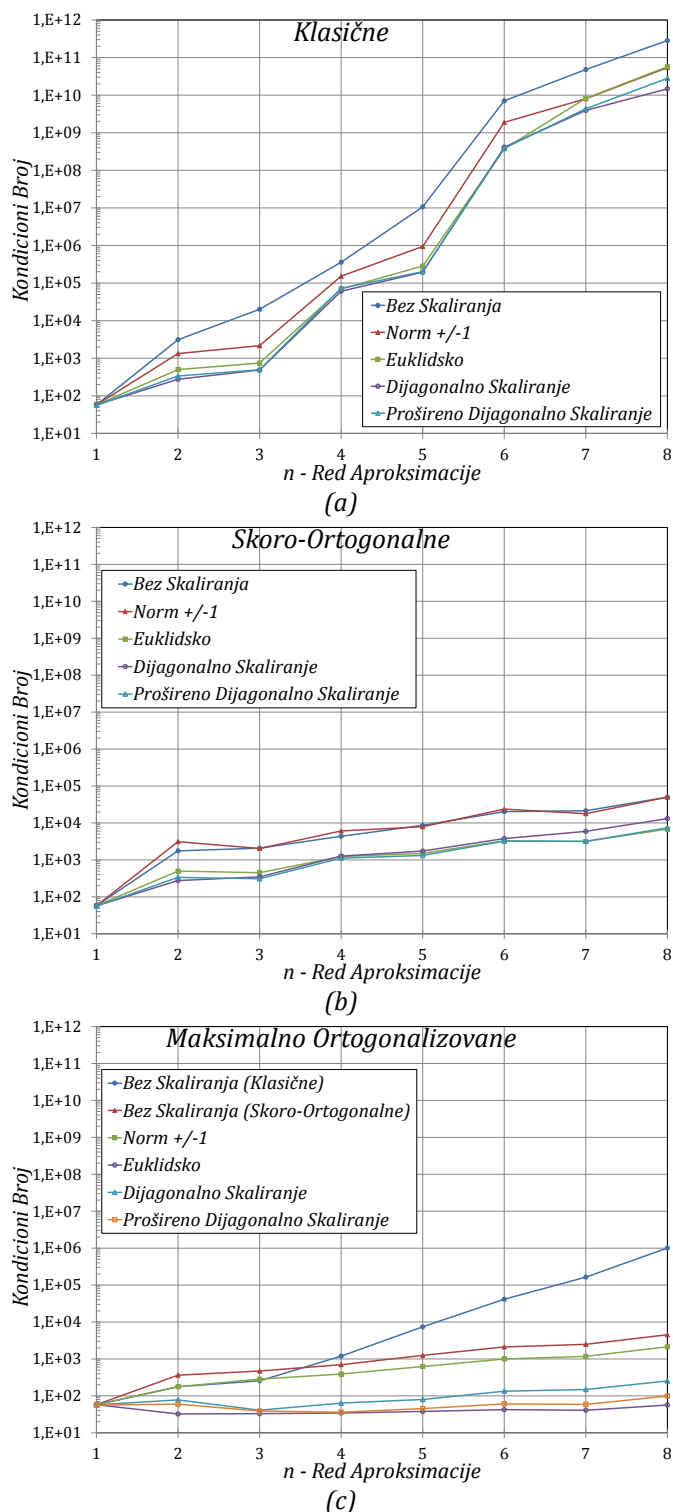
Nešto veći kondicioni broj za $n = 1$ se objašnjava znatno većim brojem nepoznatih u odnosu na slučajeve sa $n > 1$.

Odgovarajući broj iteracija u zavisnosti od usvojenog reda aproksimacije za MoM/EFIE rešenje i različite vrste funkcija bazisa (klasične, skoro-ortogonalne i maksimalno ortogonalizovane) uz primenu nekoliko strategija skaliranja je prikazan na Slici 7.6.

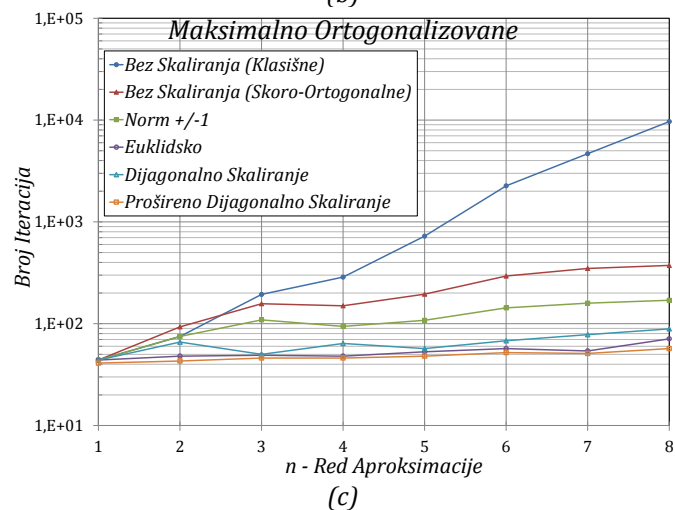
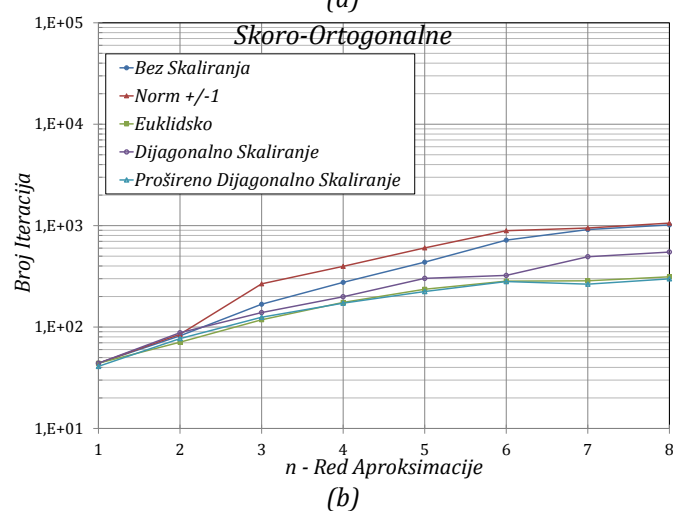
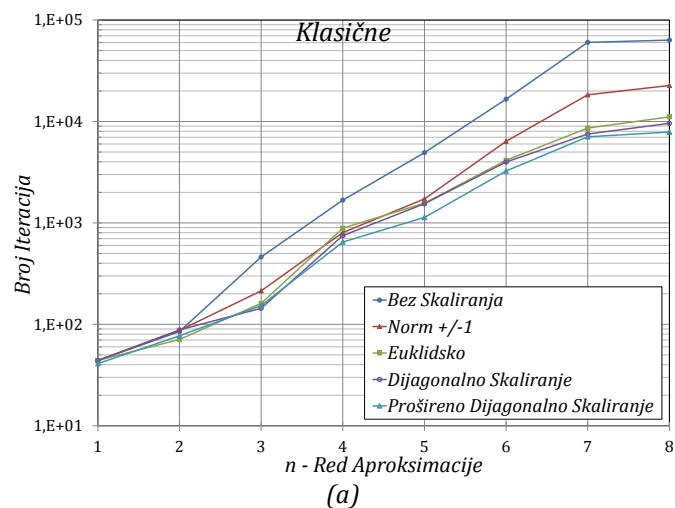
U skladu sa očekivanjima, imajući u vidu rezultate za kondicioni broj, najmanji broj iteracija se postiže korišćenjem euklidskog ili jednog od dijagonalnih skaliranja.

Kao i kod rezultata za kondicioni broj, primena skoro-ortogonalnih funkcija bazisa višeg reda rezultuje znatno manjim brojem iteracija u odnosu na klasične funkcije bazisa višeg reda, kao što i primena maksimalno ortogonalizovanih

funkcija bazisa rezultuje znatno manjim brojem iteracija u odnosu na skoro-ortogonalne funkcije bazisa višeg reda.



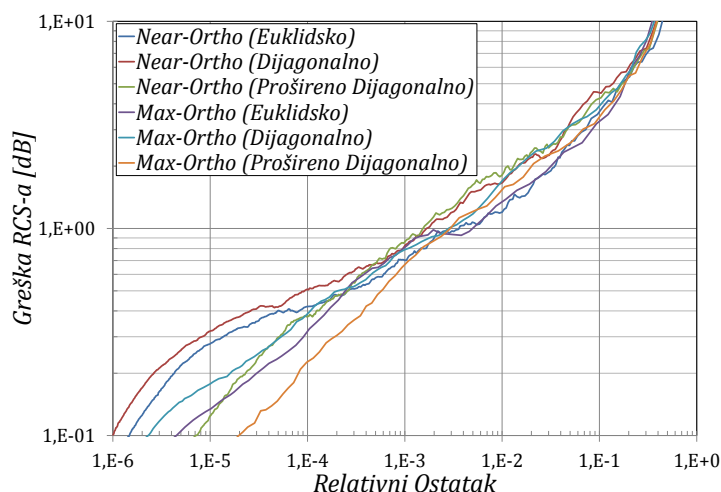
Slika 7.5 Kondicioni broj u zavisnosti od reda aproksimacije za MoM/EFIE rešenje triedarnog ugaonog reflektora korišćenjem različitih vrsta funkcija bazisa višeg reda: a) klasičnih, b) skoro-ortogonalnih, i c) maksimalno ortogonalizovanih, za različite strategije skaliranja.



Slika 7.6 Broj iteracija u zavisnosti od reda aproksimacije za MoM/EFIE rešenje triedarnog ugaonog reflektora korišćenjem različiti vrsta funkcija bazisa višeg reda: a) klasičnih, b) skoro-ortogonalnih, i c) maksimalno ortogonalizovanih, za različite strategije skaliranja.

Opet, samo u slučaju maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda u kombinaciji sa euklidskim ili proširenim dijagonalnim skaliranjem broj iteracija praktično ne zavisi od reda aproksimacije.

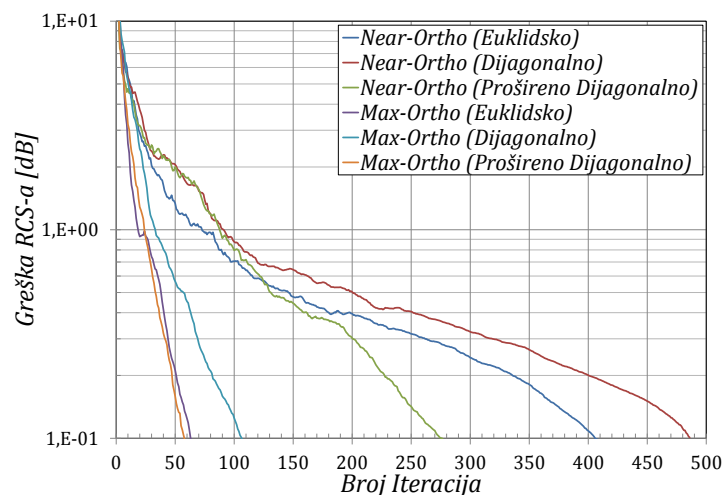
Očigledno je da ista greška za ostatak matrice jednačine dobijena primenom različitih tipova funkcija bazisa višeg reda ne rezultuje istom greškom rešenja. U tom smislu posmatrajmo srednju vrednost apsolutne greške za RCS u zavisnosti od broja iteracija iterativnog MoM/EFIE rešenja razmatranog triedarnog ugaonog reflektora prikazanu na Slici 7.7 za skoro-ortogonalne i maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa višeg reda za red aproksimacije $n = 4$ i tri tipa skaliranja: a) euklidsko, b) dijagonalno, i c) prošireno dijagonalno.



Slika 7.7 Greška za RCS u zavisnosti od greške ostatka u slučaju iterativnog MoM/EFIE rešenja triedarnog ugaonog reflektora korišćenjem dva tipa funkcija bazisa višeg reda ($n = 4$) i tri vrste skaliranja: a) euklidsko, b) dijagonalno, i c) prošireno dijagonalno.

Za nisku tačnost (greška za RCS veća od 1 dB) sve metode imaju približno istu grešku za RCS. Međutim, za veću tačnost (greška za RCS manja od 1 dB) primena maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda daje manju grešku za RCS u odnosu na skoro-ortogonalizovane funkcije bazisa višeg reda za istu vrstu skaliranja i istu grešku za ostatak. Takođe se primećuje da prošireno dijagonalno skaliranje obezbeđuje nižu grešku za RCS u odnosu na druge dve vrste razmatranih skaliranja za isti tip funkcija bazisa višeg reda i istu grešku za ostatak.

Sa praktičnog stanovišta, najvažnije je dobiti rezultat željene tačnosti sa što manjim brojem iteracija. U tom smislu, na Slici 7.8 je prikazana greška za RCS u zavisnosti od broja iteracija za skoro-ortogonalne i maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa višeg reda za red aproksimacije $n = 4$ i tri tipa skaliranja: a) euklidsko, b) dijagonalno, i c) prošireno dijagonalno.

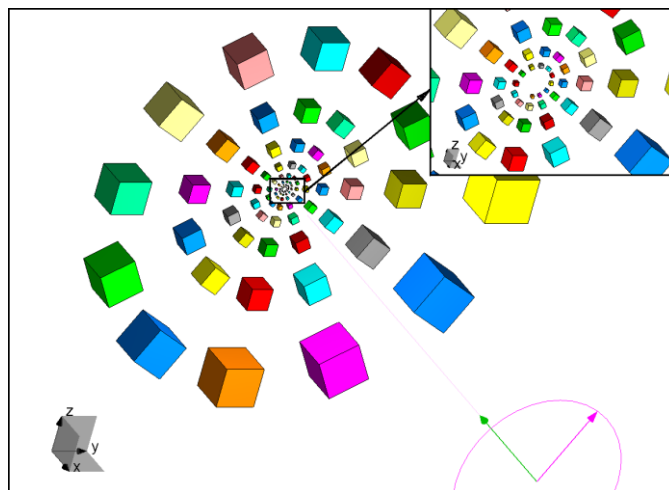


Slika 7.8 Greška za RCS u zavisnosti od broja iteracija u slučaju iterativnog MoM/EFIE rešenja triedarnog ugaonog reflektora korišćenjem dva tipa funkcija bazisa višeg reda ($n = 4$) i tri vrste skaliranja: a) euklidsko, b) dijagonalno, i c) prošireno dijagonalno.

Primećuje se da je uz korišćenje maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda broj potrebnih iteracija oko 5 puta manji u odnosu na skoro-ortogonalne funkcije bazisa višeg reda za istu grešku za RCS.

7.7.2. Spiralni log-periodični niz dielektričnih kocki

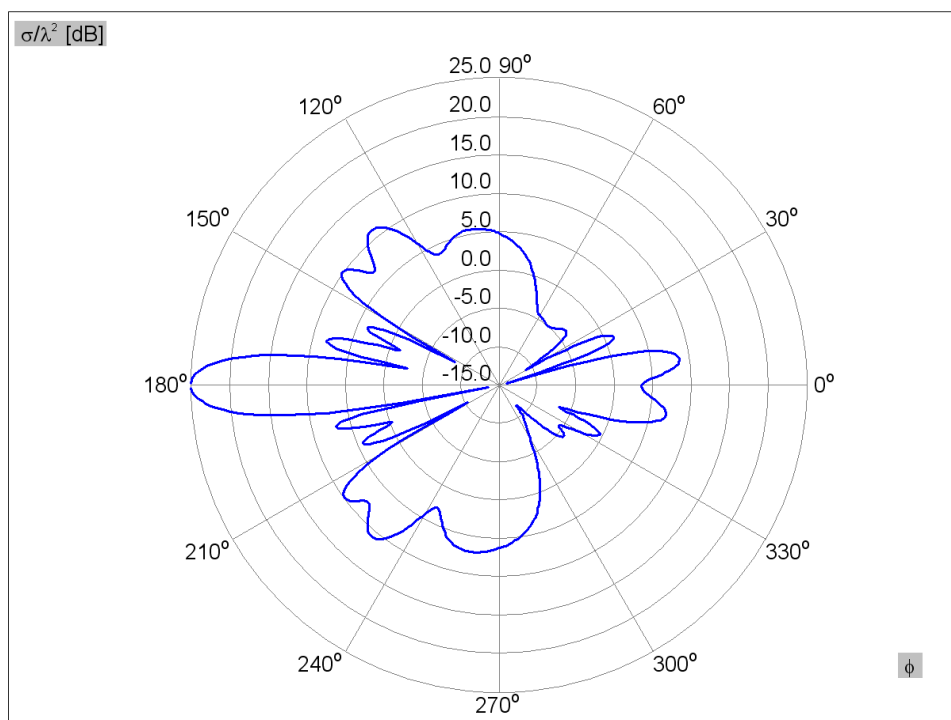
Posmatrajmo rasejač u formi spiralnog log-periodičnog niza od 100 dielektričnih kocki, kao na Slici 7.9.



Slika 7.9 Geometrijski model spiralnog log-periodičnog niza od 100 dielektričnih kocki, pobuđenog kružno-polarizovanim ravnim talasom iz pravca $(-x)$ -ose. (Različite boje ukazuju na različite osobine materijala od kojih su pojedinačne kocke sačinjene.)

Prva kocka u nizu ima stranicu dimenzije $a_1 = 2$ mm i njen centar se nalazi u tački $(0,0,-10$ mm). Svaka sledeća kocka se dobija rotiranjem prethodne za 30 stepeni oko x -ose i uvećanjem za 5% posmatrano u odnosu na koordinatni početak.

Poslednja kocka u nizu ima stranicu dimenzije $a_{100} = 250,479$ mm, što je više od 125 puta veća vrednost nego kod prve kocke. Relativna dielektrična konstanta prve (ujedno i najmanje) kocke je $\epsilon_{r1} = 100$ i za svaku sledeću se smanjuje 1,04575 puta, tako da najveća kocka ima relativnu dielektričnu konstantu $\epsilon_{r100} = 1,01$. Na ovaj način se dobija problem koji ima sa jedne strane veoma male (posmatrano lokalno) ali i veoma velike razlike (posmatrano globalno) osobina materijala. Ovaj niz se pobuđuje kružno-polarizovanim ravnim talasom iz pravca $(-x)$ -ose. Tipičan rezultat za RCS u xOy -ravni (uz normalizaciju kvadratom talasne dužine - σ/λ^2) na učestanosti $f = 1$ GHz je prikazan na Slici 7.10.

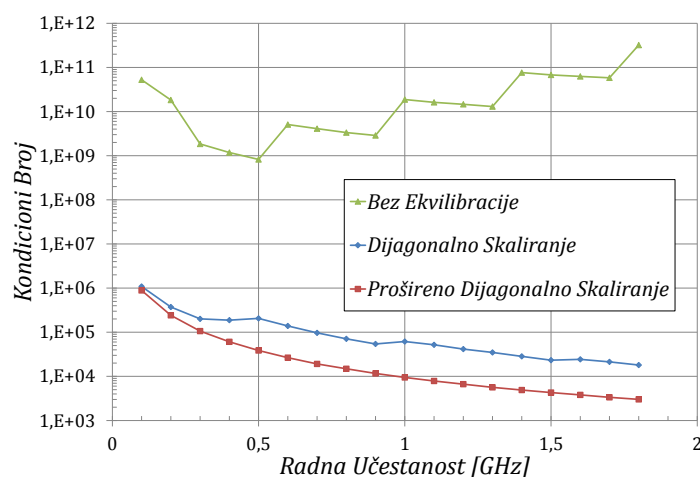


Slika 7.10 Bistatički RCS ($f = 1$ GHz) u xOy -ravni spiralnog log-periodičnog niza od 100 dielektričnih kocki, pobuđenog kružno-polarizovanim talasom iz pravca $(-x)$ -ose. (Najveći RCS je $\sigma/\lambda^2 = 25,01$ dB.)

Poređenje se vrši u opsegu učestanosti, od 0,1 GHz do 1,8 GHz. Na učestanosti od 0,1 GHz svi elementi su manji od $0,1 \lambda$, tako da je red aproksimacije $n = 1$, dok je ukupan broj nepoznatih 2400. Sa povećanjem radne učestanosti električne veličine elemenata i red aproksimacije na njima se, kao i ukupan broj nepoznatih, postepeno povećavaju. Red aproksimacije se povećava sa n na $n+1$ za granične vrednosti veličine elemenata od $\lambda/6 + (n-1)\lambda/3$. Tako se, za posmatrani primer, na

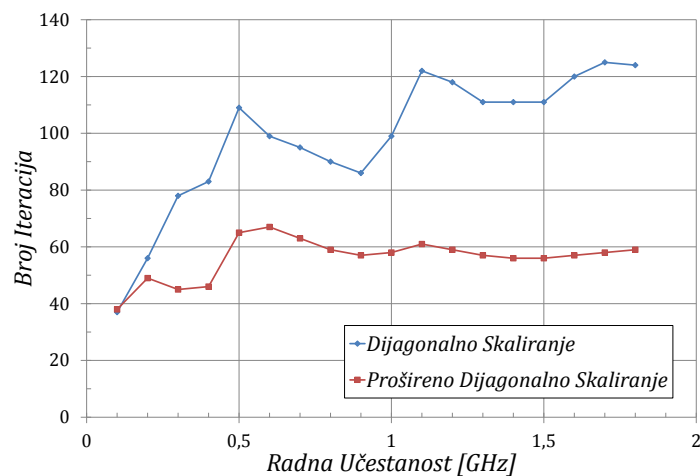
učestanosti od 1,8 GHz dostiže najveći red aproksimacije $n = 6$, dok je tada ukupan broj nepoznatih 14784.

Na Slici 7.11 prikazan je kondicioni broj u zavisnosti od učestanosti za dva tipa ekvibracije u poređenju sa slučajem bez ekvibracije. Primećuje se: a) da se primenom dijagonalnog skaliranja kondicioni broj smanjuje 10^4 - 10^7 puta i b) da se ekvibracijom zasnovanom na proširenom dijagonalnom skaliranju kondicioni broj smanjuje za još jedan red veličine.



Slika 7.11 Kondicioni broj matrice sistema u zavisnosti od učestanosti za MoM/PMCHWT rešenje spiralnog log-periodičnog niza od 100 dielektričnih kocki. Dva tipa ekvibracije se porede sa slučajem bez ekvibracije.

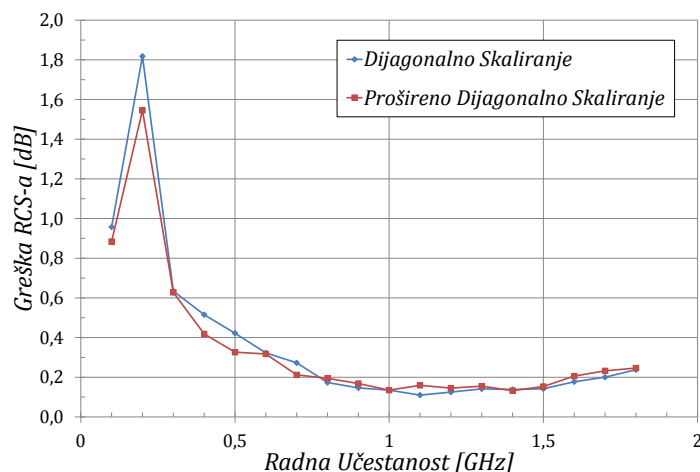
Broj iteracija u zavisnosti od učestanosti za dva tipa ekvibracije je prikazan na Slici 7.12. Primećuje se da je u oba slučaja broj iteracija manji 50-250 puta od broja nepoznatih koeficijenata. Nije prikazan rezultat za slučaj bez ekvibracije, jer se tada i nakon više desetina hiljada iteracija ne dobija smislen rezultat za RCS.



Slika 7.12 Broj iteracija u zavisnosti od učestanosti za iterativno MoM/PMCHWT rešenje spiralnog log-periodičnog niza od 100 dielektričnih kocki i dva tipa ekvibracije.

Srednja apsolutna greška za RCS u decibelima u zavisnosti od učestanosti za dva tipa ekvibracije je prikazana na Slici 7.13. Primećuje se da je ova greška ujednačena za obe ekvibracije. Takođe, na učestanosti od 0,2 GHz greška je značajno veća nego na susednim učestanostima, što je posledica izraženih nula u dijagramu zračenja rasejanog polja. Ukoliko bi se na toj učestanosti iterativni postupak nastavio dok relativni ostatak ne opadne ispod 10^{-5} (što se postiže za 111 iteracija u slučaju ekvibracije zasnovane na dijagonalnom skaliranju) greška pada sa 1,55 dB na 0,51 dB.

Ovaj primer pokazuje da primenom ekvibracije zasnovane bilo na dijagonalnom ili proširenom dijagonalnom skaliranju dolazi do značajnog smanjenja kondicionog broja i poboljšanja konvergencije pri iterativnom rešavanju problema sa oba tipa struja u površinskim integralnim jednačinama, velikim/malim razlikama u osobinama materijala, uz primenu funkcija bazisa višeg reda na elemente različitih veličina. Izostankom bilo kog od ova četiri uslova ne dolazi do značajnog poboljšanja konvergencije pri iterativnom rešavanju, što se može videti u narednom primeru.



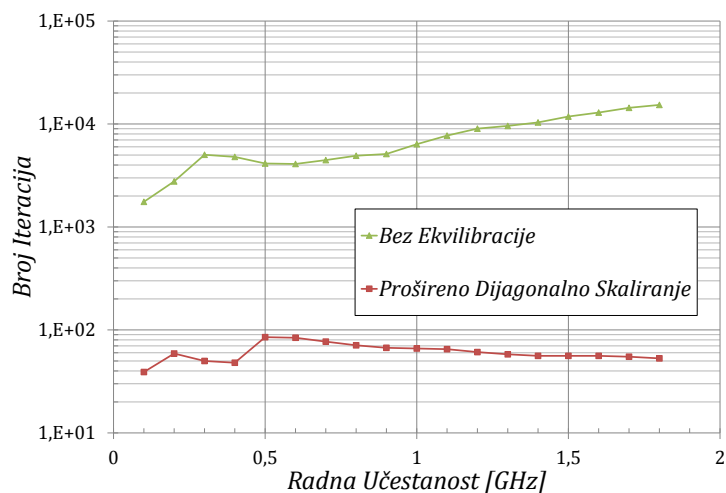
Slika 7.13 Srednja vrednost apsolutne greške za RCS (u dB) u zavisnosti od učestanosti pri iterativnom MoM/PMCHWT rešenju spiralnog log-periodičnog niza od 100 dielektričnih kocki i za dva tipa ekvibracije.

7.7.3. Spiralni log-periodični niz metalnih kocki

Neka su kocke iz prethodnog primera sačinjene od savršenog provodnika (PEC). U tom slučaju se eliminišu dva uzroka visokog kondicionog broja: korišćenje dva tipa struja u površinskim integralnim jednačinama i velike/male razlike u

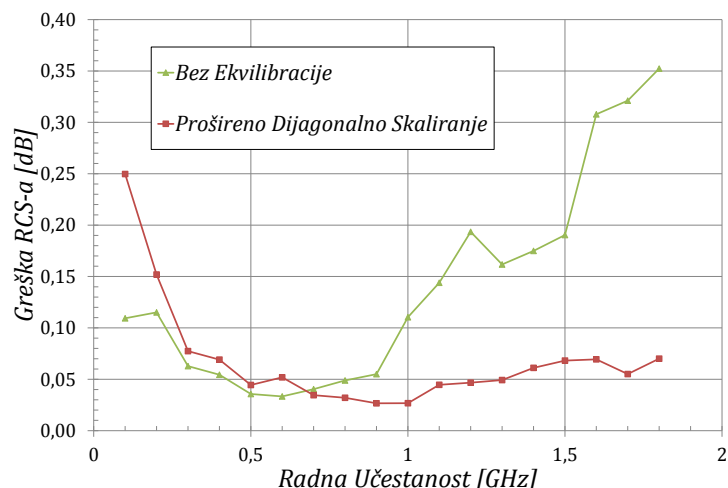
osobinama materijala, dok se i dalje koriste funkcije bazisa višeg reda i elementi različitih veličina. Tada se broj nepoznatih, za posmatrani opseg učestanosti, kreće od 1200 do 6108.

Broj iteracija u zavisnosti od učestanosti za slučaj ekvilibracije zasnovane na proširenom dijagonalnom skaliranju u poređenju sa slučajem bez ekvilibracije je prikazan na Slici 7.14. Primećuje se da se primenom ekvilibracije broj iteracija smanjuje 50-1000 puta, čak i na najnižoj učestanosti, kad se koriste samo funkcije bazisa prvog reda.



Slika 7.14 Broj iteracija u zavisnosti od učestanosti za iterativno MoM/EFIE rešenje spiralnog log-periodičnog niza od 100 PEC kocki. Rezultati dobijeni korišćenjem ekvilibracije zasnovane na proširenom dijagonalnom skaliranju se porede sa rezultatima dobijenim bez primene ekvilibracije.

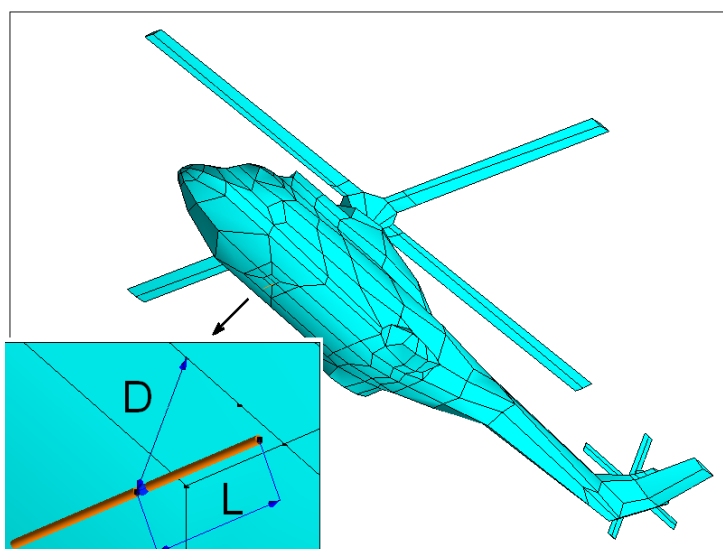
Srednja apsolutna greška za RCS (u dB) u zavisnosti od učestanosti i u dva razmatrana slučaja je prikazana na Slici 7.15. Primećuje se da je greška za RCS u proseku manja kada se primenjuje proširena ekvilibracija u odnosu na slučaj bez ekvilibracije, dok sama razlika u dva razmatrana slučaja nije toliko izražena kao kod broja iteracija.



Slika 7.15 Srednja vrednost apsolutne greške za RCS (u dB) u zavisnosti od učestanosti za iterativno MoM/EFIE rešenje spiralnog log-periodičnog niza od 100 PEC kocki. Rezultati dobijeni korišćenjem ekvilibracije zasnovane na proširenom dijagonalnom skaliranju se porede sa rezultatima dobijenim bez primene ekvilibracije.

7.7.4. Polu-talasni dipol postavljen ispod trupa helikoptera

Posmatrajmo polu-talasnu dipol antenu postavljenu ispod trupa helikoptera koji ima ukupnu dužinu od 19 m, na četvrt-talasnom rastojanju, $D = L = \lambda/4$, kao što je prikazano na Slici 7.16. Analiza se vrši na učestanosti od $f = 400$ MHz, što zahteva 13203 nepoznatih.



Slika 7.16 Geometrijski model četvrt-talasne dipol antene postavljene ispod trupa helikoptera dužine 19 m na rastojanju $D = L = \lambda/4$.

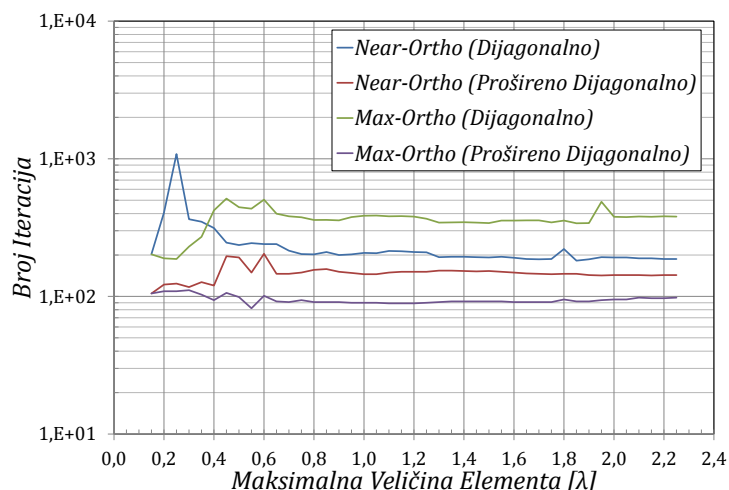
U Tabeli 7.10 su prikazani brojevi iteracija za različite vrste skaliranja maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda i više tipova matrične ekvilibracije. Faktori skaliranja maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa

višeg reda se razlikuju ukoliko se one izvode na osnovu različitih oblika hijerarhijskih funkcija polinomijalnog tipa. Druge forme skaliranja se dobijaju ujednačavanjem euklidskih normi funkcija bazisa ili normalizacijom amplitude na jediničnu vrednost ("norm ± 1 "). Vidi se da matična ekvilibracija zasnovana na *Lapack* funkcijama daje različite rezultate u zavisnosti od prvobitnih faktora skaliranja funkcija bazisa. Sa druge strane, rezultat primene matične ekvilibracije u formi dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja ne zavisi od prvobitnog skaliranja funkcija bazisa. Ujedno, dijagonalno (u manjoj meri) i prošireno dijagonalno skaliranje (u većoj meri) rezultuju manjim brojem iteracija u odnosu na *Lapack* funkcije za matičnu ekvilibraciju.

Tabela 7.10 Broj iteracija za različito skaliranje funkcija bazisa i različite metode matične ekvilibracije.

<i>Tip skaliranja max-ortho funkcija bazisa</i>	<i>Matična ekvilibracija</i>	<i>Broj iteracija</i>
Dobijene od klasičnih funkcija bazisa	<i>Lapack</i>	779
Dobijene od skoro-ortogonalnih funkcija bazisa	<i>Lapack</i>	520
Norm ± 1	<i>Lapack</i>	617
Euklidsko	<i>Lapack</i>	506
Proizvoljno	Dijagonalna	380
Proizvoljno	Proširena dijagonalna	95

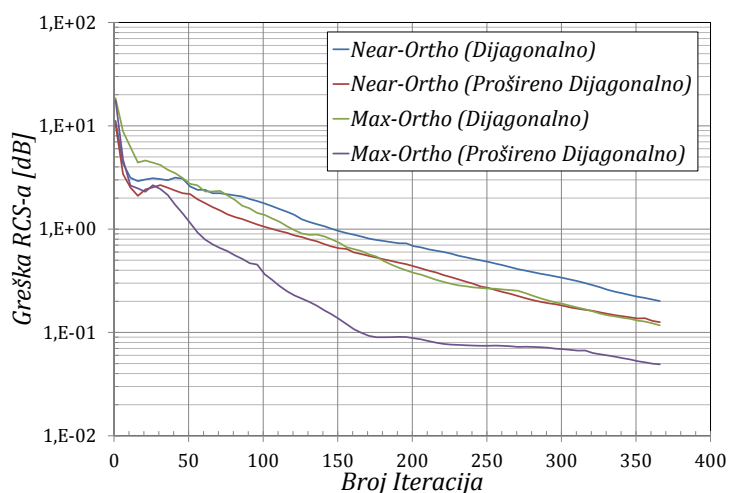
Na Slici 7.17 je prikazan broj iteracija u zavisnosti od maksimalne veličine elemenata za usvojeni relativni ostatak od 10^{-4} .



Slika 7.17 Broj iteracija u zavisnosti od maksimalne veličine elemenata za iterativno MoM/EFIE rešenje dipol antene postavljene ispod trupa helikoptera. Razmatraju se dva tipa funkcija bazisa višeg reda (skoro-ortogonalne i maksimalno ortogonalizovane) i dve vrste skaliranja (dijagonalno i prošireno dijagonalno).

Model inicijalno ima geometrijske elemente različitih veličina. Stoga, ukoliko su određeni elementi veći od zadate veličine, oni se automatski dele na minimalan broj elemenata koji su manji od zadate veličine. Tako se, smanjivanjem maksimalne veličine elementa sa $2,4 \lambda$ na $0,1 \lambda$, broj elemenata povećava sa 561 na 32657 i broj nepoznatih raste sa 13203 na 65319. Korak promene maksimalne veličine elementa je $0,05 \lambda$.

Srednja vrednost apsolutne greške za dobitak antene u zavisnosti od broja iteracija (za maksimalnu veličinu elemenata od $1,5 \lambda$) prikazana je na Slici 7.18.



Slika 7.18 Greška za dobitak antene u zavisnosti od broja iteracija za iterativno MoM/EFIE rešenje dipol antene postavljene ispod trupa helikoptera. Razmatraju se dva tipa funkcija bazisa višeg reda (skoro-ortogonalne i maksimalno ortogonalizovane) i dve vrste skaliranja (dijagonalno i prošireno dijagonalno). Maksimalna veličina elemenata je $1,5 \lambda$.

Na osnovu Slike 7.17 i Slike 7.18 evidentno je da maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa višeg reda u sprezi sa proširenim dijagonalnim skaliranjem imaju bolje performanse u odnosu na druge tipove funkcija bazisa i vrste skaliranja u pogledu: a) manjeg broja iteracija za istu grešku ostatka, b) broja iteracija koji manje zavisi od maksimalne veličine elemenata, i c) greške za dobitak antene koja je znatno manja za isti broj iteracija.

7.7.5. Modeli lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnim monopol antenom

Posmatrajmo, kao u poglavlju 4.5, model lovačkog aviona sa dva scenarija pobude (Slika 4.1a i Slika 4.1b) na učestanosti $f = 165$ MHz. Umesto jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa višeg reda sada se koriste maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa. Usvojen je relativni ostatak od 10^{-4} i koristi se CG metoda data u poglavlju 3.3.1.2. Za različite stepene popunjenosti pre, posle i pre i posle matrične inverzije određeni su kondicioni brojevi prekondicioniranih matrica i brojevi iteracija koji su potrebni za postizanje datog relativnog ostatka. Ovi rezultati su tabelarno prikazani u Tabeli 7.11 i Tabeli 7.12 za slučaj lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnim monopol antenom, respektivno.

Tabela 7.11 Kondicioni broj (KB) i broj iteracija (BI) modela lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom za različite stepene popunjenosti matrice prekondicioniranja sa proređivanjem pre, posle i pre i posle matrice inverzije (max-ortho funkcije bazisa). (Broj nepoznatih je 1906, dok je za sistem bez prekondicioniranja kondicioni broj $8,14e+05$ i broj iteracija 1046.)

Stepen Popune (%)	Pre		Posle		Pre + Posle	
	KB	BI	KB	BI	KB	BI
95	6,62e+00	4	1,17e+00	1	6,62e+00	4
90	3,02e+01	8	1,52e+00	3	3,02e+01	8
85	1,84e+02	15	2,08e+00	4	1,84e+02	15
80	1,93e+02	20	2,80e+00	5	1,94e+02	22
75	5,90e+03	36	4,30e+00	8	6,15e+03	47
70	2,24e+03	34	7,16e+00	12	2,45e+03	45
65	2,19e+03	58	1,18e+01	18	2,76e+03	89
60	4,17e+03	70	2,06e+01	24	1,10e+04	136
55	5,79e+03	74	5,13e+01	39	6,94e+04	139
50	5,70e+03	120	1,16e+02	62	5,61e+05	277
45	7,22e+03	98	3,01e+02	114	2,13e+05	216
40	9,74e+03	122	2,84e+03	163	3,98e+05	216
35	3,86e+04	188	2,45e+03	218	4,96e+06	466
30	6,13e+04	208	4,01e+03	309	1,17e+07	612
25	8,75e+04	161	1,09e+04	483	3,81e+07	331
20	2,06e+04	305	9,07e+03	649	5,89e+06	617
15	6,98e+04	266	8,65e+03	672	1,27e+07	638
10	6,88e+04	352	1,65e+04	902	1,35e+07	776
5	1,45e+05	176	4,72e+04	1039	5,59e+06	626

Za razliku od slučaja kada su korišćene jednostavne hijerarhijske (klasične) funkcije bazisa višeg reda, sa maksimalno ortogonalizovanim funkcijama implicitno prekondicioniranje se pokazuje nešto doslednijim sa smanjenjem stepena popunjenosti matrice prekondicioniranja.

Tabela 7.12 Kondicioni broj (KB) i broj iteracija (BI) modela lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom za različite stepene popunjenosti matrice prekondicioniranja sa proređivanjem pre, posle i pre i posle matrice inverzije (max-ortho funkcije bazisa).
(Broj nepoznatih je 1970, dok je za sistem bez prekondicioniranja kondicioni broj $1,35e+06$ i broj iteracija 2117.)

Stepen Popune (%)	Pre		Posle		Pre + Posle	
	KB	BI	KB	BI	KB	BI
95	7,01e+00	4	1,19e+00	2	7,01e+00	4
90	2,69e+01	9	1,55e+00	3	2,69e+01	9
85	2,47e+02	18	2,13e+00	4	2,47e+02	19
80	2,89e+02	30	2,94e+00	5	2,91e+02	33
75	2,43e+03	38	4,47e+00	8	2,61e+03	48
70	2,82e+03	56	7,36e+00	12	3,11e+03	84
65	2,09e+03	56	1,23e+01	17	2,91e+03	92
60	1,80e+03	74	2,57e+01	26	4,66e+03	165
55	4,58e+03	105	6,69e+01	37	8,30e+04	241
50	2,28e+04	168	1,55e+02	54	7,98e+05	704
45	1,22e+04	156	3,33e+02	92	2,96e+05	338
40	1,30e+04	131	2,32e+03	140	7,10e+05	275
35	5,20e+04	151	2,50e+03	190	7,31e+06	520
30	1,19e+05	76	1,66e+04	292	1,38e+07	311
25	1,02e+05	205	8,12e+04	480	2,80e+07	804
20	6,00e+04	227	1,21e+04	653	7,61e+07	1151
15	1,06e+05	492	5,38e+04	1096	1,01e+07	3728
10	8,18e+04	488	2,18e+04	2888	7,41e+06	2913
5	8,99e+04	344	4,67e+04	7744	7,51e+06	1165

Ukoliko se na matricu sistema dobijenu uz primenu maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa najpre primeni dijagonalno skaliranje, a tek onda proređivanje matrice prekondicioniranja, dobijaju se rezultati dati u Tabeli 7.13 i Tabeli 7.14 za slučaj lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnom monopol antenom, respektivno.

Tabela 7.13 Kondicioni broj (KB) i broj iteracija (BI) modela lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom za različite stepene popunjenosti matrice prekondicioniranja sa proređivanjem pre, posle i pre i posle matrice inverzije (max-ortho funkcije bazisa).
(Broj nepoznatih je 1906, dok je za sistem sa dijagonalnim skaliranjem kondicioni broj $6,18e+03$ i broj iteracija 149.)

Stepen Popune (%)	Pre		Posle		Pre + Posle	
	KB	BI	KB	BI	KB	BI
95	1,07e+00	1	1,03e+00	1	1,07e+00	1
90	1,21e+00	2	1,08e+00	2	1,21e+00	2
85	1,48e+00	2	1,14e+00	2	1,49e+00	2
80	1,92e+00	3	1,24e+00	2	1,93e+00	3
75	2,66e+00	3	1,40e+00	3	2,69e+00	4
70	3,82e+00	4	1,60e+00	3	3,90e+00	5
65	6,10e+00	5	1,91e+00	4	6,29e+00	8
60	9,19e+00	6	2,46e+00	5	9,67e+00	10
55	1,81e+01	8	3,34e+00	7	2,00e+01	15
50	2,85e+01	11	4,97e+00	8	3,57e+01	24
45	4,77e+01	14	7,77e+00	11	7,05e+01	40
40	7,60e+01	19	1,33e+01	15	1,44e+02	72
35	1,42e+02	24	2,20e+01	23	3,48e+02	102
30	1,83e+02	31	4,48e+01	37	8,55e+02	121
25	3,21e+02	36	1,49e+02	65	6,53e+03	152
20	8,96e+02	48	2,39e+02	90	6,55e+04	205
15	1,06e+03	47	1,37e+03	124	4,97e+04	157
10	7,53e+03	107	3,04e+03	181	3,69e+05	333
5	4,64e+04	106	5,08e+03	235	1,22e+06	470

Samom primenom dijagonalnog skaliranja broj iteracija se smanjuje oko 7 puta za slučaj lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i oko 2 puta za slučaj lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnog monopola antenom u odnosu na slučajevne kada se na matricu sistema ne primenjuje prekondicioniranje.

Na osnovu Tabele 7.13 i Tabele 7.14 je evidentno da je za dalje smanjenje broja iteracija, u poređenju sa slučajem kada je primenjeno dijagonalno skaliranje, potrebno zadržati relativno visok stepen popunjenosti matrice prekondicioniranja (više od 10%). Kod implicitnog prekondicioniranja je tada (efektivni) red matrice

koju treba invertovati srazmeran kvadratnom korenu stepena popunjenosti. Broj potrebnih operacija za invertovanje je srazmeran trećem stepenu (efektivnog) reda matrice koja se invertuje, tako da sa iole većim stepenom popunjenosti vreme konstrukcije matrice prekondicioniranja postaje dominantno i prekondicioniranje gubi na efikasnosti.

Tabela 7.14 Kondicioni broj (KB) i broj iteracija (BI) modela lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom za različite stepene popunjenosti matrice prekondicioniranja sa proređivanjem pre, posle i pre i posle matrice inverzije (max-ortho funkcije bazisa).
(Broj nepoznatih je 1970, dok je za sistem sa dijagonalnim skaliranjem kondicioni broj $7,67e+03$ i broj iteracija 1114.)

Stepen Popune (%)	Pre		Posle		Pre + Posle	
	KB	BI	KB	BI	KB	BI
95	1,09e+00	2	1,03e+00	1	1,09e+00	2
90	1,29e+00	2	1,08e+00	1	1,29e+00	2
85	1,61e+00	2	1,15e+00	2	1,61e+00	2
80	2,21e+00	3	1,25e+00	2	2,22e+00	4
75	3,27e+00	4	1,43e+00	2	3,28e+00	4
70	4,84e+00	5	1,64e+00	3	4,92e+00	6
65	8,14e+00	6	1,97e+00	4	8,31e+00	8
60	1,22e+01	7	2,59e+00	4	1,28e+01	10
55	2,32e+01	9	3,61e+00	6	2,50e+01	15
50	4,00e+01	11	5,57e+00	8	4,75e+01	24
45	8,39e+01	15	8,98e+00	11	1,14e+02	45
40	1,10e+02	18	1,56e+01	15	2,06e+02	66
35	2,07e+02	23	2,74e+01	23	5,23e+02	104
30	2,43e+02	29	6,42e+01	35	9,15e+02	139
25	3,59e+02	39	2,17e+02	56	7,93e+03	187
20	7,59e+02	56	2,68e+02	99	2,84e+04	260
15	4,23e+03	96	8,82e+02	172	1,29e+06	550
10	2,99e+04	218	4,87e+03	288	1,29e+06	1280
5	1,36e+04	450	5,01e+03	479	5,50e+05	1506

7.8. Rezime

U ovoj glavi je prikazan jedan od postupaka izvođenja maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa na osnovu proizvoljnog polaznog skupa funkcija bazisa višeg reda. Pored izuzetne jednostavnosti, ovaj postupak omogućava i konverziju datog rešenja u rešenje sa proizvoljnim višim redovima aproksimacije pojedinačnih elemenata. Takođe se i dato rešenje može predstaviti preko polaznog skupa funkcija bazisa, što je od izuzetnog značaja pri korišćenju već postojećih algoritama za post-procesiranje. Prednosti maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa u odnosu na jednostavne hijerarhijske (klasične) funkcije bazisa višeg reda, kao i skoro-ortogonalne, su demonstrirane na više primera na kraju glave. Takođe su razmatrani i efekti matrične ekvibracije u obliku dijagonalnog i proširenog dijagonalnog skaliranja. Pokazalo se da se takvim prekondicioniranjem kondicioni broj matrice sistema gde se koriste maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa može u izvesnoj meri smanjiti. To daje povod za razvoj novog postupka prekondicioniranja koji je predmet naredne glave.

8. Jedan nov postupak prekondicioniranja baziran na linearnom kombinovanju vrsta i kolona matrice metode momenata

Matrična ekvilibracija zasnovana na modulima matričnih elemenata MoM matrice se pokazala kao veoma jednostavan postupak čijom se primenom može smanjiti broj iteracija pri iterativnom rešavanju sistema. Problem koji se manifestuje kod jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa visokih redova u vidu izuzetno visokog kondicionog broja matrice sistema se može efikasno ublažiti ortogonalizacijom funkcija bazisa na nivou jednog površinskog elementa. Prirodno se postavlja pitanje da li je sličan princip ortogonalizacije moguće primeniti i na nivou cele strukture, u slučaju kada su poznati svi matrični elementi za već usvojeni skup funkcija bazisa. U ovoj glavi će biti predstavljen jedan nov postupak prekondicioniranja MoM matrice formirane Galerkinovim testiranjem baziran na linearnom kombinovanju funkcija bazisa. Ukoliko je matrica polaznog sistema simetrična, početni skup funkcija bazisa može biti proizvoljan i jedini zahtev koji se postavlja je da su inicijalne funkcije bazisa čisto realne. Pokazuje se da se povećanjem ortogonalnosti vrsta (a time i kolona, zbog osobine simetrije) može uticati na smanjenje kondicionog broja. U kombinaciji sa smanjenjem modula nedijagonalnih elemenata u odnosu na dijagonalne elemente dobija se efikasan prekondicioner zasnovan na linearnom kombinovanju vrsta i kolona. Biće predstavljeno nekoliko vrsta prekondicioniranja ovog tipa, uz numeričke rezultate za efikasnost njihove primene na nekoliko modela koji su razmatrani u prethodnim glavama.

8.1. Polazna razmatranja

Kako se postupak dijagonalnog skaliranja pokazao kao izuzetno jednostavan i pritom veoma efikasan način za smanjenje broja iteracija kod iterativnih

postupaka za rešavanje MoM sistema jednačina, isti se može iskoristiti kao polazna osnova za složenije metode.

MoM matrica je kompleksna kvadratna matrica. Za formulacije koje su razmatrane u ovom radu (EFIE i PMCHWT) i uz primenu Galerkinovog testiranja, ona je pritom i simetrična. Najefikasniji (u pogledu ukupnog broja računskih operacija) iterativni postupak za rešavanja sistema sa ovakvim tipom matrica je metoda konjugovanih gradijenata (CG). Efikasnost same CG metode za rešavanje datog problema može se posmatrati primarno preko broja potrebnih iteracija za postizanje zadanog relativnog ostatka.

U većini slučajeva smanjenje broja iteracija iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina (time i CG metode) je uslovljeno smanjenjem kondicionog broja matrice sistema. Jedna od klasa matrica koje imaju trivijalne inverzne matrice su unitarne matrice [119]. Unitarne matrice imaju nekoliko specifičnih osobina, od kojih je prva jedinični kondicioni broj (usled lokalizacije sopstvenih vrednosti na jediničnom krugu). Zatim, njihove vrste (kao i kolone) obrazuju ortonormalni bazis i samim tim svaka njihova vrsta (i kolona) ima jediničnu normu-2. Najzad, njihova inverzna matrica je jednaka konjugovano-transponovanoj matrici polazne. Kod CG metode rešenje se u slučaju matrice sistema koja je unitarna dobija u samo jednoj iteraciji. Postupak transformacije matrice u unitarnu se zasniva na formiranju ortonormalnog bazisa i izuzetno je zahtevan u pogledu potrebnog broja računskih operacija, koji više puta prevazilazi broj operacija potreban za direktno rešenje. Umesto toga u ovom radu je pretpostavljeno da se korišćenjem relativno malog broja transformacija polazna MoM matrica može učiniti što "bližom" unitarnoj matrici.

Druga klasa matrica koje imaju (skoro) trivijalne inverze matrice su dijagonalne matrice kod kojih se postupak određivanja inverzne matrice sastoji samo u nalaženju recipročnih vrednosti dijagonalnih elemenata. Njihov kondicioni broj je određen maksimalnim odnosom modula dijagonalnih elemenata, a sami dijagonalni elementi su ujedno i sopstvene vrednosti matrice. U slučaju jediničnih modula dijagonalnih elemenata ova matrica je takođe i unitarna i ima jediničan kondicioni broj. Transformacija matrice u dijagonalnu (recimo Gausovom

eliminacijom primenjenom u dva smera) je takođe izuzetno zahtevan postupak u pogledu potrebnog broja računskih operacija. Umesto toga u ovom radu je pretpostavljeno da se korišćenjem relativno malog broja transformacija polazna MoM matrica može učiniti što “bližom” dijagonalnoj matrici, čiji svi dijagonalni elementi imaju jedinični modul. Ovakva pretpostavka je dodatno potkrepljena razmatranjima u poglavljima 8.1.1 i 8.1.2.

8.1.1. Geršgorinova teorema o lokalizaciji sopstvenih vrednosti matrice

Geršgorinova teorema [120] identifikuje oblasti u kompleksnoj ravni koje sadrže sve sopstvene vrednosti kompleksne kvadratne matrice. Za $n \times n$ kompleksnu matricu \mathbf{A} sa vrednostima a_{ij} se za $i \in \{1, \dots, n\}$ definiše $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ kao suma apsolutnih vrednosti svih nedijagonalnih elemenata i -te vrste. Tada se svaka od sopstvenih vrednosti, λ_i , $i=1, \dots, n$, matrice \mathbf{A} nalazi bar u jednom od diskova $D(a_{ii}, R_i) = \{z : |z - a_{ii}| \leq R_i\}$ u kompleksnoj ravni. Zatvoreni disk $D(a_{ii}, R_i)$ sa centrom u a_{ii} i poluprečnikom R_i naziva se Geršgorinovim diskom.

8.1.2. Kondicioni broj - veza sa sopstvenim i singularnim vrednostima matrice

Kondicioni broj $n \times n$ kompleksne matrice \mathbf{A} se tipično (koristeći normu-2) definiše preko njenih singularnih vrednosti kao odnos njihove najveće i najmanje vrednosti, $cond(\mathbf{A}) = \sigma_1 / \sigma_n$. Takođe, kondicioni broj matrice \mathbf{A} se može izračunati i na osnovu sopstvenih vrednosti matrice $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ kao kvadratni koren odnosa najvećeg i najmanjeg modula sopstvenih vrednosti matrice $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$, $cond(\mathbf{A}) = \sqrt{|\lambda_1(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) / \lambda_n(\mathbf{A}^H \mathbf{A})|}$. Samo u slučaju normalnih matrica ($\mathbf{A} \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H \mathbf{A}$) važi $cond(\mathbf{A}) = |\lambda_1(\mathbf{A}) / \lambda_n(\mathbf{A})|$, odnosno kondicioni broj se može odrediti i kao odnos modula najveće i najmanje sopstvene vrednosti matrice. Odnos modula najveće i najmanje sopstvene vrednosti matrice se naziva i kondicionim brojem izračunatim na osnovu sopstvenih vrednosti, $econd(\mathbf{A}) = |\lambda_1(\mathbf{A}) / \lambda_n(\mathbf{A})|$. Određujući odnose sopstvenih i singularnih vrednosti matrica sistema modela razmatranih u

numeričkim primerima u poglavlju 7.7.5 dobijaju se odnosi (kao i relativna odstupanja) dati u Tabeli 8.1.

Tabela 8.1 Odnosi maksimalnih i minimalnih sopstvenih i singularnih vrednosti razmatranih MoM matrica.

<i>Model</i>	<i>Tip funkcija bazisa</i>	$econd = \left \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right $	$cond = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$	$\varepsilon = \frac{econd}{cond} - 1$
<i>Lovački avion pobuđen ravnim talasom</i>	Klasične HOBFs	5,2263e+06	6,5858e+06	-0,2064
	Maksimalno ortogonalizovane	6,1192e+03	6,1762e+03	-0,0092
<i>Lovački avion pobuđen četvrt-talasnim monopolom</i>	Klasične HOBFs	6,7946e+06	7,5009e+06	-0,0942
	Maksimalno ortogonalizovane	7,5943e+03	7,6683e+03	-0,0097

Na osnovu dobijenih rezultata (preciznije, relativnih odstupanja do ~20%) evidentno je da se kod MoM matrica ovog tipa kondicioni broj može na zadovoljavajući način estimirati i preko sopstvenih vrednosti matrice. Ova činjenica, uz Geršgorinovu teoremu daje osnovu za nov postupak prekondicioniranja.

8.1.3. Osnovni elementi postupka prekondicioniranja zasnovanog na linearnom kombinovanju vrsta i kolona matrice metode momenata

Kako bi se povećala efikasnost iterativne metode koja je izabrana za iterativno rešavanje sistema linearnih jednačina (ovde je to CG metoda), potrebno je smanjiti kondicioni broj matrice sistema, što će u najvećem broju slučajeva rezultovati smanjenjem broja iteracija za zadati relativni ostatak.

Ukoliko adekvatnim transformacijama obezbedimo da su dijagonalni elementi matrice znatno veći po apsolutnoj vrednosti od svih preostalih elemenata matrice, a pritom i jedinične apsolutne vrednosti, to će, prema Geršgorinovoј teoremi, i maksimalni odnos modula sopstvenih vrednosti biti manji. Kako maksimalni odnos modula sopstvenih vrednosti veoma dobro estimira vrednost kondicionog broja (na osnovu rezultata u poglavlju 8.1.2), to će i kondicioni broj tako transformisane

matrice biti manji. Smanjenje kondicionog broja ekvivalentnog sistema će, u najvećem broju slučajeva, rezultovati smanjenjem broja iteracija iterativnog postupka (time i CG postupka koji se ovde razmatra) za traženi relativni ostatak. Primenom dijagonalnog skaliranja, čime se obezbeđuje da se dijagonalni elementi nalaze na jediničnom krugu, i smanjenjem amplituda nedijagonalnih elemenata, dolazi do koncentrisanja sopstvenih vrednosti u Geršgorinovim diskovima što manjeg poluprečnika sa centrima na jediničnom krugu. Tako transformisana matrica sistema će po više kriterijuma biti “bliska” dijagonalnoj matrici sa dijagonalnim elementima jediničnog modula. Ukoliko se obezbedi da su i vrste/kolone matrice što više međusobno ortogonalne (što se ujedno pokazalo kao neophodan uslov tokom numeričkog testiranja) to će transformisana matrica zaista biti veoma “bliska” unitarnoj matrici.

Tako, da bi smanjili kondicioni broj polaznog sistema (sve ca ciljem smanjenja broja iteracija izabranog iterativnog postupka za zadati relativni ostatak), potrebno je da sa jedne strane smanjimo apsolutne vrednosti nedijagonalnih elemenata matrice. Sa druge strane je potrebno povećati ortogonalnost vrsta/kolona. Smanjenje apsolutnih vrednosti nedijagonalnih elemenata se može proceniti na osnovu kvadrata nepotpune norme-2 pojedinačnih vrsta/kolona, dok se ortogonalnost vrsta/kolona može proceniti na osnovu vrednosti skalarnog proizvoda vrsta/kolona.

8.2. Kriterijumi za optimalno linearno kombinovanje vrsta i kolona

U petoj glavi su razmatrani efekti linearnog kombinovanja funkcija bazisa i test funkcija na matricu sistema. Kako bi se očuvala priroda Galerkinovog testiranja, svako kombinovanje funkcija bazisa mora biti praćeno istovremenim kombinovanjem test funkcija. Za standardnu definiciju unutrašnjeg proizvoda (2.21) (koristeći konjugovanu vrednost test funkcije) kombinovanjem funkcije \mathbf{f}_i sa funkcijom \mathbf{f}_k i težinskim koeficijentom C u funkciju \mathbf{f}'_i preko:

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_i + C\mathbf{f}_k, \quad k \neq i, \quad (8.1)$$

za nove elemente impedansne matrice se dobija, na osnovu (2.21):

$$z'_{ij} = z_{ij} + C^* z_{kj}, \quad j \neq i, \quad (8.2a)$$

$$z'_{ji} = z_{ji} + C z_{jk}, \quad j \neq i, \quad (8.2b)$$

$$z'_{ii} = z_{ii} + C^* z_{ik} + C z_{ki} + |C|^2 z_{kk}. \quad (8.2c)$$

Ukoliko bi hteli da zadržimo (pretpostavljenu) polaznu simetričnost matrice ($z_{ji} = z_{ij}$), čime takođe usvojena iterativna metoda (CG) ne bi izgubila na efikasnosti, moralo bi da važi $C^* = C$, odnosno koeficijent C bi morao da bude realan. Ovaj uslov se može relaksirati ako se ima u vidu da su polazne test funkcije realne i da se rešenje sistema ne bi promenilo ukoliko bi se u definicionom izrazu za unutrašnji proizvod (2.21) koristila upravo vrednost test funkcije, a ne njena konjugovana vrednost. U tom slučaju bi imali (imajući u vidu i svojstvo simetrije):

$$z'_{ij} = z_{ij} + C z_{kj}, \quad j \neq i, \quad (8.3a)$$

$$z'_{ji} = z_{ji} + C z_{jk} = z'_{ij}, \quad j \neq i, \quad (8.3b)$$

$$z'_{ii} = z_{ii} + C(z_{ik} + z_{ki}) + C^2 z_{kk} = z_{ii} + 2C z_{ki} + C^2 z_{kk}. \quad (8.3c)$$

Ukoliko se izvrši generalizacija izraza (8.1) na slučaj linearnog kombinovanja funkcije \mathbf{f}_i sa L drugih funkcija \mathbf{f}_{k_p} , $k_p \neq i$, $p=1, \dots, L$, i težinskim koeficijentima C_p , $p=1, \dots, L$, (respektivno) imamo:

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_i + \sum_{p=1}^L C_p \mathbf{f}_{k_p}, \quad k_p \neq i. \quad (8.4)$$

Na osnovu (8.4) i uz modifikovanu definiciju unutrašnjeg proizvoda (2.21) posle linearnog kombinovanja matrični elementi z_{ij} se transformišu u matrične elemente z'_{ij} za koje važi:

$$z'_{ij} = z_{ij} + \sum_{p=1}^L C_p z_{k_p j}, \quad j \neq i, \quad (8.5a)$$

$$z'_{ji} = z_{ji} + \sum_{p=1}^L C_p z_{j k_p} = z'_{ij}, \quad j \neq i, \quad (8.5b)$$

$$z'_{ii} = z_{ii} + \sum_{p=1}^L C_p (z_{i k_p} + z_{k_p i}) + \sum_{p=1}^L \sum_{q=1}^L C_p C_q z_{k_p k_q}. \quad (8.5c)$$

Normalizacijom matičnih elemenata z'_{ij} tako da dijagonalni elementi imaju jediničnu amplitudu dobijaju se matični elementi z''_{ij} :

$$z''_{ij} = \frac{z'_{ij}}{\sqrt{|z'_{ii}|}}, \quad j \neq i, \quad z''_{ji} = \frac{z'_{ji}}{\sqrt{|z'_{ii}|}}, \quad j \neq i, \quad z''_{ii} = \frac{z'_{ii}}{|z'_{ii}|}. \quad (8.6)$$

Sve veličine dobivene posle linearnog kombinovanja biće označene sa prim ('), a posle jedinične normalizacije (po modulu) sa sekundum ('').

Radi lakšeg proračuna kvadrata norme-2 i ortogonalnosti definiše se nepotpuni skalarni proizvod i puni skalarni proizvod dve vrste (i -te i k -te) kao:

$$S_{ik} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z_{ij} z_{kj}^*, \quad P_{ik} = \sum_{j=1}^n z_{ij} z_{kj}^* = S_{ik} + z_{ii} z_{ki}^*. \quad (8.7a,b)$$

Posle linearnog kombinovanja ovi skalarni proizvodi se označavaju sa S'_{ik} i P'_{ik} , a posle dijagonalnog skaliranja sa S''_{ik} i P''_{ik} . Pre i posle dijagonalnog skaliranja ovi skalarni proizvodi su povezani relacijama:

$$S''_{ik} = \frac{S'_{ik}}{\sqrt{|z'_{ii}|}}, \quad k \neq i, \quad S''_{ii} = \frac{S'_{ii}}{|z'_{ii}|}, \quad (8.8a)$$

$$P''_{ik} = S''_{ik} + \frac{z'_{ii} z_{ki}^*}{|z'_{ii}| \sqrt{|z'_{ii}|}}, \quad k \neq i, \quad P''_{ii} = 1 + S''_{ii}. \quad (8.8b)$$

Kako pre linearnog kombinovanja i posle dijagonalnog skaliranja dijagonalni elementi imaju jedinični modul, tj. $|z_{ii}|=1$ i $|z''_{ii}|=1$, kao mera za veličinu nedijagonalnih članova i -te vrste se uzimaju nepotpuni skalarni proizvodi S_{ii} i S''_{ii} , respektivno. Uočimo da ovi nepotpuni skalarni proizvodi predstavljaju kvadrate nepotpune norme-2 za i -tu vrstu, tj. kvadrate norme-2 za i -tu vrstu pri čijem je računanju izostavljen dijagonalni element.

Mere za međusobnu ortogonalnost i -te i k -te vrste, jedna pre linearnog kombinovanja, a druga posle jediničnog normiranja, se definišu u obliku:

$$O_{ik} = \frac{|P_{ik}|}{\sqrt{P_{ii}} \sqrt{P_{kk}}}, \quad O''_{ik} = \frac{|P''_{ik}|}{\sqrt{P''_{ii}} \sqrt{P''_{kk}}}. \quad (8.9)$$

Uočimo da je u ovim izrazima skalarni proizvod i -te i k -te vrste normalizovan normama i -te i k -te vrste. Vrednost ovako definisane ortogonalnosti ne zavisi od težinskih konstanti kojima se množe i -ta i k -ta vrsta. Međutim, tokom numeričkog testiranja se pokazalo da ovakvo normiranje ne utiče bitno na krajnji rezultat linearnog kombinovanja, te da se u tom smislu kao mera ortogonalnosti umesto O_{ik} i O_{ik}'' mogu koristiti samo moduli skalarnih proizvoda P_{ik} i P_{ik}'' . Takođe se pokazalo da se krajni rezultat linearnog kombinovanja neće bitno promeniti ukoliko se umesto ovih potpunih skalarnih proizvoda koriste nepotpuni skalarni proizvodi S_{ik} i S_{ik}'' .

Jedan cilj linearnog kombinovanja sa dijagonalnim skaliranjem je da se smanji srednja kvadratna vrednost nedijagonalnih elemenata vrste (kvadrat nepotpune norme-2 vrste), tj. da se dobije:

$$\rho_{ii} = \frac{S_{ii}''}{S_{ii}} < 1. \quad (8.10)$$

Drugi cilj linearnog kombinovanja sa dijagonalnim skaliranjem je da se poveća ortogonalnost posmatrane vrste u odnosu na sve vrste sa kojima se kombinuje, tj. da se dobije:

$$\rho_{ik_p} = \frac{|S_{ik_p}''|}{|S_{ik_p}|} < 1, \quad p = 1, \dots, L. \quad (8.11)$$

Pokazuje se da se pogodnim izborom konstanti C_p , $p = 1, \dots, L$, mogu značajno smanjiti faktori ρ_{ii} i ρ_{ik_p} , $p = 1, \dots, L$. Takođe je utvrđeno da je za smanjenje kondicionog broja i broja iteracija neophodno da se pri svakom linearnom kombinovanju zadovolje oba kriterijuma, i (8.10) i (8.11). Posebno je pitanje kako između velikog broja kombinacija konstanti C_p , $p = 1, \dots, L$, koje zadovoljavaju oba kriterijuma, izabrati onu koja vodi ka najvećem povećanju efikasnosti iterativnog postupka. U tom smislu je usvojeno da se bira ona kombinacija koja ima najmanji kombinovani faktor ρ , koji se računa po formuli:

$$\rho = \sqrt{\alpha \rho_{ii}^2 + (1 - \alpha) \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \rho_{ik_p}^2}, \quad (8.12)$$

gde parametar α uzima vrednosti od 0 do 1, i čiju optimalnu vrednost treba odrediti numeričkim eksperimentom.

Postoji puno načina da se odrede kombinacije konstanti C_p , $p=1,\dots,L$, koje zadovoljavaju oba kriterijuma i neke od metoda njihovog određivanja su predmet sledećeg poglavlja.

8.3. Metode nalaženja težinskih koeficijenata linearnog kombinovanja vrsta i kolona

Koeficijenti kombinovanja vrsta/kolona, C_p , $p=1,\dots,L$, se mogu odrediti na više načina. Najjednostavniji, ali pritom i najmanje efikasan, pristup bi bila neka forma sistematskog pretraživanja. U tom slučaju bi se pretraga vršila u prostoru dimenzije $2L$ i imali bi L nezavisnih faza, ograničenih intervalom $[0,2\pi)$, i L nezavisnih amplituda (čije granice nisu unapred poznate) pri određivanju skupa koeficijenata C_p . Čak i za manji broj vrsta sa kojima se vrši kombinovanje, L , efikasnost ovakve metode bi bila izuzetno nepovoljna sa stanovišta broja potrebnih računskih operacija. Usvajanjem određenih pretpostavki moguće je znatno povećati efikasnost metoda određivanja koeficijenata skupa koeficijenata C_p i u ovom radu će biti predstavljene dve takve metode.

Jedna od metoda koje su se tokom numeričkog testiranja pokazale efikasnim u pogledu smanjenja kondicionog broja i broja iteracija se zasniva na ortogonalizaciji posmatrane vrste sa L drugih vrsta. Druga se bazira na minimizaciji kvadrata nepotpune norme-2 vrste pre dijagonalnog skaliranja, uz redukciju kombinatornog prostora sa dimenzije $2L$ na dimenziju L (i u posebnom slučaju na 0), ali zahteva i dodatan korak optimizacije (u slučaju kad prostor variranja faza ima dimenziju L).

8.3.1. Ortogonalizacija posmatrane vrste sa L drugih vrsta

Pri kombinovanju funkcije \mathbf{f}_i sa L drugih funkcija \mathbf{f}_{k_p} , $k_p \neq i$, $p=1,\dots,L$ sa težinskim koeficijentima C_p , $p=1,\dots,L$ (respektivno) na osnovu (8.5) i (8.7) za

nepotpune skalarne proizvode posle kombinovanja, a pre dijagonalnog skaliranja, dobijamo:

$$S'_{ik_q} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z'_{ij} z'^*_{k_q j} = S_{ik_q} + \sum_{p=1}^L C_p \cdot S_{k_p k_q}, \quad q=1, \dots, L. \quad (8.13)$$

Zbog pojednostavljenja (u vidu rešavanja jednostavnog sistema linearnih jednačina) i činjenice da se ovako postavljen uslov potpune ortogonalnosti ne menja nakon dijagonalnog skaliranja zahtevaćemo da važi:

$$S'_{ik_q} = 0, \quad q=1, \dots, L. \quad (8.14)$$

Na osnovu (8.13) i (8.14) dobija se sistem linearnih jednačina:

$$\sum_{p=1}^L C_p \cdot S_{k_p k_q} = -S_{ik_q}, \quad q=1, \dots, L, \quad (8.15)$$

čijim se rešavanjem određuju koeficijenti C_p , $p=1, \dots, L$.

U nastavku će ova metoda određivanja težinskih koeficijenata biti označena kao **FO metoda**.

8.3.1. Minimizacija kvadrata nepotpune norme-2 vrste pri kombinovanju sa L drugih vrsta uz redukciju kombinatornog prostora

Pri kombinovanju funkcije f_i sa L drugih funkcija f_{k_p} , $k_p \neq i$, $p=1, \dots, L$ sa težinskim koeficijentima C_p , $p=1, \dots, L$ (respektivno) na osnovu (8.5) i (8.7) za nepotpuni skalarni proizvod posle kombinovanja, a pre dijagonalnog skaliranja, dobijamo:

$$S'_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |z'_{ij}|^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z'_{ij} z'^*_{ij} = S_{ii} + \sum_{q=1}^L C_q^* S_{ik_q} + \sum_{p=1}^L C_p S_{k_p i} + \sum_{p=1}^L \sum_{q=1}^L C_p C_q^* S_{k_p k_q}, \quad (8.16a)$$

$$S'_{ii} = S_{ii} + 2\text{Re} \left\{ \sum_{p=1}^L C_p^* S_{ik_p} \right\} + \sum_{p=1}^L |C_p|^2 S_{k_p k_p} + 2\text{Re} \left\{ \sum_{p=2}^L \sum_{q=1}^{p-1} C_p C_q^* S_{k_p k_q} \right\}, \quad (8.16b)$$

gde je oblik (8.16b) pogodniji za potrebe numeričkih izračunavanja.

Od interesa je minimizacija vrednosti $S''_{ii} = S'_{ii} / |z'_{ii}|$. Kako je do minimizacije ovog izraza teško doći u analitičkoj formi, ona će biti urađena u dodatnom koraku u

kome se koristi neki oblik optimizacije, dok se do minimizacije izraza S'_{ii} može doći znatno jednostavnije.

Ukoliko se koeficijenti C_p , $p=1, \dots, L$ usvoje u formi:

$$C_p = C_p^m e^{j\phi_p}, \quad (8.17)$$

gde je C_p^m , $p=1, \dots, L$ čisto realan koeficijent, dimenzija kombinatornog prostora se redukuje sa (inicijalne) vrednosti $2L$ na vrednost L postavljanjem sistema jednačina:

$$\frac{\partial}{\partial C_p^m} S'_{ii} = 0, \quad p=1, \dots, L. \quad (8.18)$$

U tom slučaju imamo zavisnost samo po fazama ϕ_p , $\phi_p \in [0, 2\pi)$, $p=1, \dots, L$, dok se amplitude određuju na osnovu (8.18).

Zamenom (8.16) u (8.18) dobija se:

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-j\phi_p} S_{ik_p}\right\} + C_p^m S_{k_p k_p} + \operatorname{Re}\left\{\sum_{q=1, q \neq l}^L e^{j\phi_p} C_q^m e^{-j\phi_q} S_{k_p k_q}\right\} = 0, \quad p=1, \dots, L. \quad (8.19)$$

Oдавde se koeficijenti C_p^m , $p=1, \dots, L$ određuju rešavanjem sistema:

$$\sum_{p=1}^L C_p^m \operatorname{Re}\left\{e^{j(\phi_l - \phi_p)} S_{k_l k_p}\right\} = -\operatorname{Re}\left\{e^{-j\phi_l} S_{ik_l}\right\}, \quad l=1, \dots, L, \quad (8.20)$$

što uz relaciju (8.17) daje vrednosti koeficijenata C_p , $p=1, \dots, L$ u zavisnosti od ϕ_p , $p=1, \dots, L$, $\phi_p \in [0, 2\pi)$.

Ova metoda određivanja težinskih koeficijenata će u nastavku biti označena kao **P-Opt metoda**.

Kako je:

$$\frac{\partial^2}{\partial (C_l^m)^2} S'_{ii} = 2S_{k_l k_l} > 0, \quad (8.21)$$

to S'_{ii} ima minimum za usvojeni skup vrednosti ϕ_p , $p=1, \dots, L$.

Dodatna redukcija kombinatornog prostora, sa dimenzije L na 0 se može izvršiti usvajanjem uslova:

$$\operatorname{Im}\left\{e^{-j\phi_p} S_{ik_p}\right\} = 0, \quad p=1, \dots, L, \quad (8.22)$$

odakle se dobija $\phi_p = \arg\{S_{ik_p}\} + q\pi$, $p = 1, \dots, L$, $q \in Z$. U tom slučaju, za $L = 1$, uslovi (8.14) i (8.18) rezultuju istom vrednošću koeficijenta linearnog kombinovanja.

U nastavku će ova varijanta P-Opt metode za određivanje težinskih koeficijenata biti označena kao **FP metoda**.

Takođe, za $L = 1$ i proizvoljno ϕ_1 modul nepotpunog skalarnog proizvoda posle kombinovanja (i pre dijagonalnog skaliranja) se ne povećava. Naime, na osnovu (8.20) imamo:

$$C_1^m S_{k_1 k_1} = -\operatorname{Re}\{e^{-j\phi_1} S_{ik_1}\}, \quad (8.23)$$

odnosno, zbog (8.17):

$$C_1 = -\frac{|S_{ik_1}|}{S_{k_1 k_1}} e^{j\phi_1} \cos(\phi_{ik_1} - \phi_1). \quad (8.24)$$

Zamenom (8.24) u (8.13) i nakon par transformacija izraza dobijamo:

$$S'_{ik_1} = S_{ik_1} + C_1 \cdot S_{k_1 k_1} = j S_{ik_1} e^{-j(\phi_{ik_1} - \phi_1)} \sin(\phi_{ik_1} - \phi_1), \quad (8.25)$$

odakle je evidentno da je $|S'_{ik_1}| = |S_{ik_1}| \cdot |\sin(\phi_{ik_1} - \phi_1)|$ i da se čak za $\phi_1 = \phi_{ik_1}$ dobija minimalna (ovde je to nulta) vrednost.

8.4. Optimalan izbor vrsta/kolona za linearno kombinovanje

Za vrstu/kolonu koja se popravljja se bira vrsta/kolona koja ima najveću normu-2. Ukoliko se utvrdi da datu vrstu/kolonu nije moguće popraviti skupom vrsta/kolona sa kojima se “popravka” pokušava, ona se “pasivizira”, odnosno dodaje u skup vrsta/kolona čija se “popravka” ne pokušava nadalje.

Skup vrsta/kolona kojima se pokušava popravka se formira na osnovu apsolutne vrednosti elemenata matrice koji odgovaraju međusobnoj sprezi. Ovde je usvojen princip da se iz skupa od M najjačih elemenata (isključujući dijagonalni element posmatrane vrste/kolone čija se “popravka” razmatra) biraju podskupovi od po L elemenata čime se određuju indeksi vrsta/kolona kojima se pokušava “popravka” posmatrane vrste/kolone. Za tako određen skup indeksa, odnosno vrsta/kolona se, nekom od metoda za nalaženje težinskih koeficijenata, određuju težinski koeficijenti kombinovanja i testiraju vrednosti faktora ρ_{ii} i ρ_{ik_p} , $p = 1, \dots, L$

u odnosu na usvojene pragove. Ukoliko su vrednosti ovih faktora zadovoljavajuće, usvaja se skup težinskih koeficijenata i vrši linearno kombinovanje, praćeno dijagonalnim skaliranjem. Kod optimizacije (na nivou skupa od L elemenata), za svako od rešenja koje je zadovoljavajuće po oba kriterijuma (smanjenju kvadrata norme-2 i povećanju ortogonalnosti) se računa kombinovani faktor ρ , koji se kasnije koristi pri poređenju više prihvatljivih skupova rešenja za težinske koeficijente kombinovanja (za izabrani skup od M vrsta/kolona) i izboru najboljeg. Umesto usvajanja prvog zadovoljavajućeg skupa težinskih koeficijenata može se vršiti testiranje sa svim podskupovima od po L elemenata iz skupa od M elemenata i izabrati najbolji. U tom slučaju bi broj računskih operacija po subiteraciji linearnog kombinovanja bio konstantan.

Vrsta/kolona koja se u datom trenutku ne može popraviti se “pasivizira” i time, bar privremeno, eliminiše iz daljeg razmatranja. Može se desiti da vrste/kolone koje su “pasivizirane” posle određenog broja subiteracija dolaze u situaciju da se mogu “popraviti”. Ovakva mogućnost se uzima u obzir ponovnim pokretanjem procedure u smislu eliminisanja skupa vrsta/kolona čija se popravka ne razmatra. Tada se kompletna procedura ponovo pokreće posle $k \cdot n$ subiteracija (tipično $k = 1$) i uvek kada se ustanovi da je skup vrsta čija se popravka razmatra zapravo prazan skup.

8.5. Optimalna strategija linearnog kombinovanja

Kao optimalna strategija linearnog kombinovanja ovde je usvojeno kombinovanje vrste/kolone sa drugim vrstama/kolonama prvim podskupom od L elementa iz skupa od M elemenata koji ima zadovoljavajuće faktore smanjenja kvadrata norme-2 i povećanja ortogonalnosti. Ovaj pristup ima za cilj što manji broj računskih operacija po subiteraciji linearnog kombinovanja. Pritom je i način formiranja podskupova od L elemenata iz skupa od M elemenata takav da se favorizuju elementi sa većim modulom. Kod optimizacije na nivou izabranog skupa od L elemenata (određenog indeksima vrsta/kolona) procedura se ne prekida pronalaskom prvog zadovoljavajućeg rešenja, već se traži minimum po kombinovanom faktoru ρ u celom (dostupnom) kombinatornom prostoru.

Adekvatnim izborom koeficienta α u izrazu (8.12) može se uticati na dominantnost kvadrata norme-2 ($\alpha=1$ u graničnom slučaju) ili ortogonalnosti ($\alpha=0$ u graničnom slučaju) u okviru kombinovanog faktora ρ . Ovde će biti usvojeno $\alpha=0$ kako bi se ostvarila što veća ortogonalnost kod metode određivanja težinskih koeficijenata koja je zasnovana na minimizaciji nepotpune norme-2 i kao takva poredila sa metodom određivanja težinskih koeficijenata koja je zasnovana na ortogonalizaciji vrsta/kolona. Takođe, vrednost $\alpha=0$ se tokom numeričkog testiranja pokazala kao izuzetno povoljna u smislu obezbeđivanja što manjeg kondicionog broja za određene klase problema.

8.6. Numerički primeri

Svi proračuni su rađeni u *software*-skom paketu WIPL-D Pro v10.0 [118]. Za potrebe simulacija korišćene su površinske integralne jednačine EFIE za metalne strukture. Nepoznate površinske gustine struja se predstavljaju preko jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) i maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa višeg reda koje su definisane duž žica i nad četvorouglovima. Najveća veličina elementa koja se koristi je 2λ i za nju je usvojen red aproksimacije $n=7$. Elementi veći od 2λ se automatski segmentišu na minimalan broj manjih elemenata koji su manji od zadate veličine. Matrična jednačina koja se dobija primenom metode momenata se rešava CG metodom (datom u poglavlju 3.3.1.2) sa relativnim ostatkom od 10^{-4} .

8.6.1. Spektar matrice za različite taktike linearnog kombinovanja vrsta/kolona za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom

Za potrebe inicijalnog numeričkog testiranja razmatrana je MoM matrica sistema modela borbenog aviona pobuđenog prosto-periodičnim ravnim elektromagnetskim talasom (Slika 4.1a), uz korišćenje jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa.

Primenjene su sledeće taktike za kombinovanje vrsta/kolona:

- (0) slučaj bez kombinovanja, što ujedno predstavlja i referentni rezultat sa kojim se porede druge taktike;
- (1) kombinovanje vrsta/kolona sa još samo po jednom vrstom/kolonom, vodeći računa o što manjem kvadratu norme-2 nove vrste/kolone, metodom sistematskog pretraživanja (*brute-force*) u opsegu amplituda do 2 i punom opsegu faza;
- (2) kombinovanje vrsta/kolona sa još samo po jednom vrstom/kolonom, koristeći FO metodu određivanja težinskog koeficijenta, pritom ne vodeći računa o eventualnom povećanju kvadrata norme-2 posmatrane vrste/kolone;
- (3) kombinovanje vrsta/kolona sa još samo po jednom vrstom/kolonom, koristeći FO metodu određivanja težinskog koeficijenta, pritom vodeći računa o eventualnom povećanju kvadrata norme-2 posmatrane vrste/kolone (uz vrednost odgovarajućeg parametra od 0,95);
- (4) kombinovanje vrsta/kolona sa još samo po jednom vrstom/kolonom, koristeći P-Opt metodu određivanja težinskog koeficijenta (uz vrednost odgovarajućeg parametra od 0,95 i optimizaciju sa faktorom kombinovanja 0), pritom vodeći računa i o ortogonalnosti vrsta/kolona (uz vrednost odgovarajućeg parametra od 0,95).

Koristeći navedene taktike izvršeno je N kombinovanja sa po jednom vrstom i za dva stanja - početno (koje je identično za sve primenjene taktike) i stanje nakon N kombinovanja su određene sopstvene i singularne vrednosti odgovarajućih matrica sistema. U slučaju kombinovanja sa još samo jednom dodatnom vrstom se pokazuje da taktika (3) i poseban slučaj taktike (4) (bez dodatnog koraka optimizacije - FP metoda) imaju identične koeficijente linearnog kombinovanja vrsta.

U Tabeli 8.2 su date redom vrednosti najvećeg modula sopstvenih vrednosti, najmanjeg modula sopstvenih vrednosti, najveće singularne vrednosti, najmanje singularne vrednosti, kondicionog broja izračunatog na osnovu sopstvenih vrednosti matrice, kondicionog broja matrice po standardnoj definiciji, kvadrat

Frobenijusove norme (videti *Prilog A*) odgovarajuće matrice sistema i broj iteracija CG metode sa relativnom ostatkom od 10^{-4} , za svaku od primenjenih taktika.

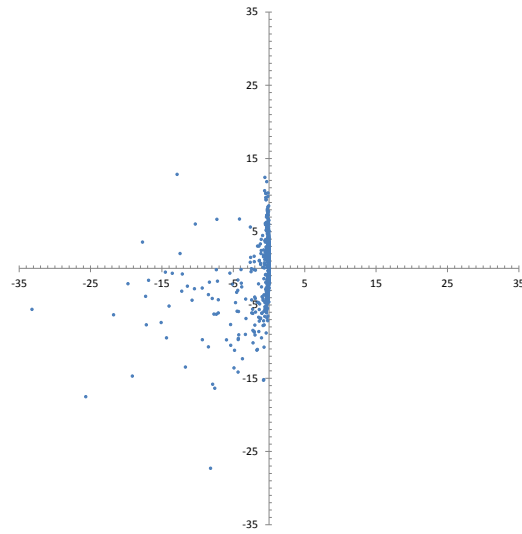
Raspodele sopstvenih vrednosti odgovarajućih matrica dobivenih linearnim kombinovanjem vrsta/kolona u kompleksnoj ravni su prikazane na Slikama 8.1-8.5.

Primena taktike (1) zaista rezultuje najmanjim zbirom kvadrata normi-2 svih vrsta, kao i najmanjom maksimalnom singularnom vrednošću. Kako je i minimalna singularna vrednost za red veličine manja u odnosu na slučaj kada se ne vrši linearno kombinovanje vrsta/kolona (taktika (0)), dolazi čak do porasta kondicionog broja i broja iteracija.

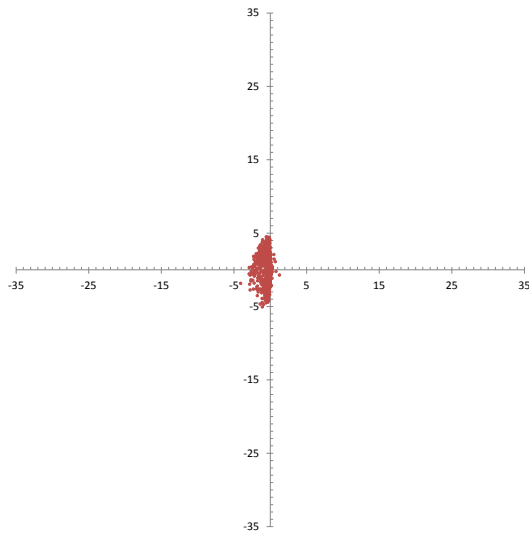
Kada se vodi računa samo o povećanju ortogonalnosti vrsta/kolona dobijaju se neznatno bolji rezultati za kondicioni broj i broj iteracija primenom taktike (2).

Tabela 8.2 Pokazatelji taktika za linearno kombinovanje vrsta/kolona na nivou matrice sistema.

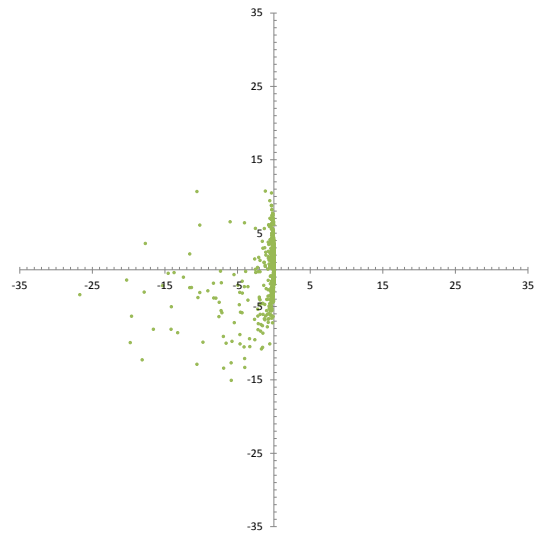
Taktika	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
$ \lambda_1 $	3,3667e+01	5,1670e+00	2,6946e+01	7,7614e+00	7,2179e+00
$ \lambda_n $	6,4418e-06	6,3638e-07	6,4134e-06	8,7098e-05	7,1470e-05
σ_1	4,2425e+01	5,9329e+00	3,3810e+01	9,6160e+00	1,0505e+01
σ_n	6,4418e-06	3,9987e-07	6,4131e-06	8,3133e-05	6,9115e-05
$econd = \lambda_1/\lambda_n$	5,23e+06	8,12e+06	4,20e+06	8,91e+04	1,01e+05
$cond = \sigma_1/\sigma_n$	6,59e+06	1,48e+07	5,27e+06	1,16e+05	1,52e+05
Kvadrat Frobenijusove Norme	2,8691e+04	6,4005e+03	2,3645e+04	9,2929e+03	9,7852e+03
Broj Iteracija	587	847	544	265	231



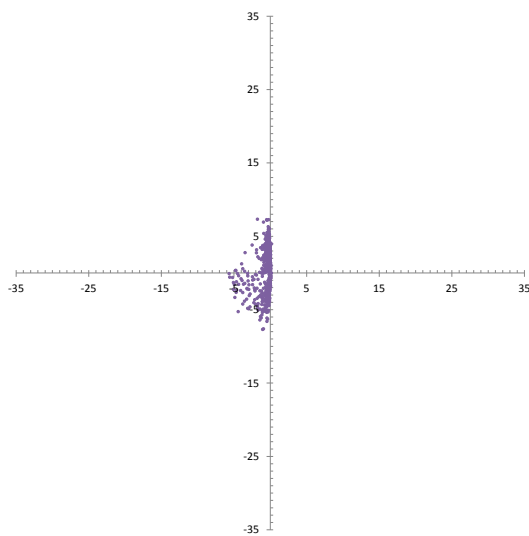
Slika 8.1 Spektar matrice za taktiku (0).



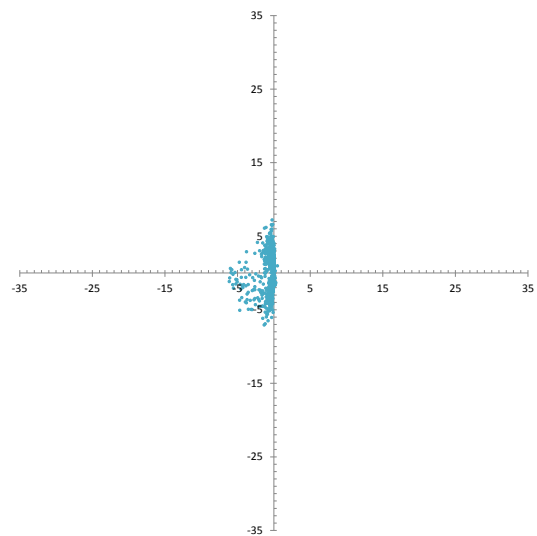
Slika 8.2 Spektar matrice za taktiku (1).



Slika 8.3 Spektar matrice za taktiku (2).



Slika 8.4 Spektar matrice za taktiku (3).



Slika 8.5 Spektar matrice za taktiku (4).

Tek uz dodavanjem uslova smanjenja modula nedijagonalnih elemenata dolazi do značajnijeg smanjenja kondicionog broja i broja iteracija, kao kod taktike (3).

Slično važi i za taktiku (4), tako da zaključujemo da samo kombinacija uslova smanjenja modula nedijagonalnih elemenata i povećanja ortogonalnosti vrsta/kolona matrice sistema vodi smanjenju kondicionog broja i broja iteracija transformisanog sistema. Upravo zbog toga se ova kombinacija uslova usvaja kao jedna od osnovnih komponenti optimalne strategije linearnog kombinovanja.

Isti zaključci bi se mogli izvesti ukoliko bi spektri matrica bili prikazani u logaritamskoj razmeri. Vizuelno, na osnovu Slika 8.1-8.5, spektri taktika (0) i (2) su veoma slični, kao i spektri taktika (3) i (4). Iako spektar taktike (1) ima najveću grupisanost oko koordinatnog početka, zbog nepovoljnog odnosa maksimalne i minimalne sopstvene vrednosti ova taktika ima izuzetno loše performanse.

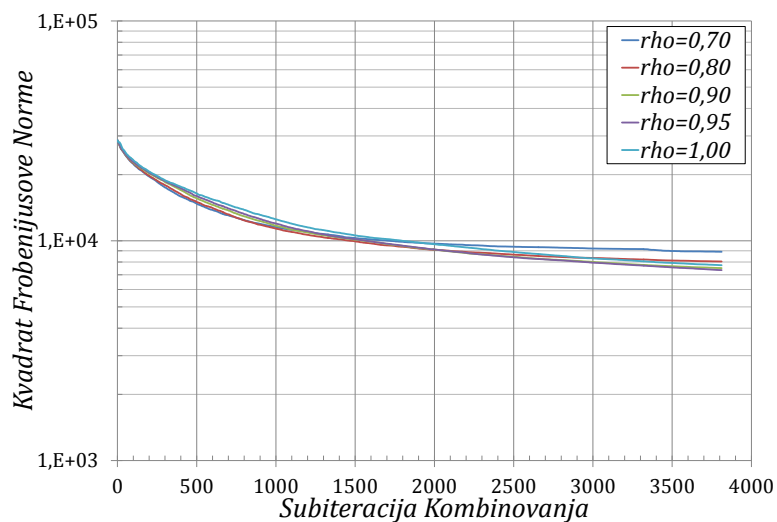
8.6.2. Izbor parametara i poređenje različitih metoda određivanja težinskih koeficijenata linearnog kombinovanja vrsta/kolona na modelima lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnom monopol antenom

Tri metode određivanja težinskih koeficijenata linearnog kombinovanja vrsta/kolona su primenjene na modele lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (Slika 4.1a) i četvrt-talasnom monopol antenom (Slika 4.1b). Pritom, FO označava metodu određivanja težinskih koeficijenata zasnovanu na ortogonalizaciji vrste/kolone sa drugim vrstama/kolonama, kao u poglavlju 8.3.1, i primenjenu u sklopu optimalne strategije linearnog kombinovanja. FP označava metodu određivanja težinskih koeficijenata zasnovanu na suboptimalnoj minimizaciji kvadrata nepotpune norme-2 bez dodatnog koraka optimizacije, kao u poglavlju 8.3.2, i primenjenu u sklopu optimalne strategije linearnog kombinovanja. P-Opt označava metodu određivanja težinskih koeficijenata zasnovanu na suboptimalnoj minimizaciji kvadrata nepotpune norme-2 sa dodatnim korakom optimizacije, kao u poglavlju 8.3.2, i primenjenu u sklopu optimalne strategije linearnog kombinovanja.

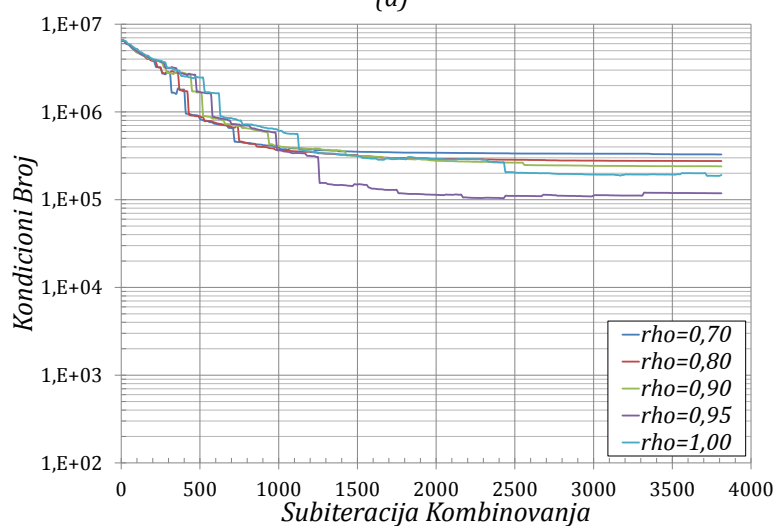
Broj subiteracija linearnog kombinovanja za usvojenu strategiju optimalnog linearnog kombinovanja je postavljen na $2N$, gde je N broj nepoznatih modela. Funkcije bazisa višeg reda koje se koriste su jednostavne hijerarhijske (klasične) i maksimalno ortogonalizovane. Najpre je razmatran model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom uz upotrebu klasičnih funkcija bazisa i na osnovu toga su određene optimalne vrednosti odgovarajućih parametara. Ove vrednosti su zatim korišćene pri poređenju predstavljenih metoda određivanja težinskih koeficijenata za oba razmatrana modela i obe vrste korišćenih funkcija bazisa višeg reda.

Efekte linearnog kombinovanja su razmatrani u pogledu: a) zbira kvadrata normi-2 svih vrsta tj. kvadrata Frobenijusove norme matrice transformisanog sistema, b) kondicionog broja, i c) broja iteracija. Odgovarajući grafici su generisani za različite vrednosti parametara kojima se mogu podešavati metode određivanja težinskih koeficijenata koje su ovde korišćene.

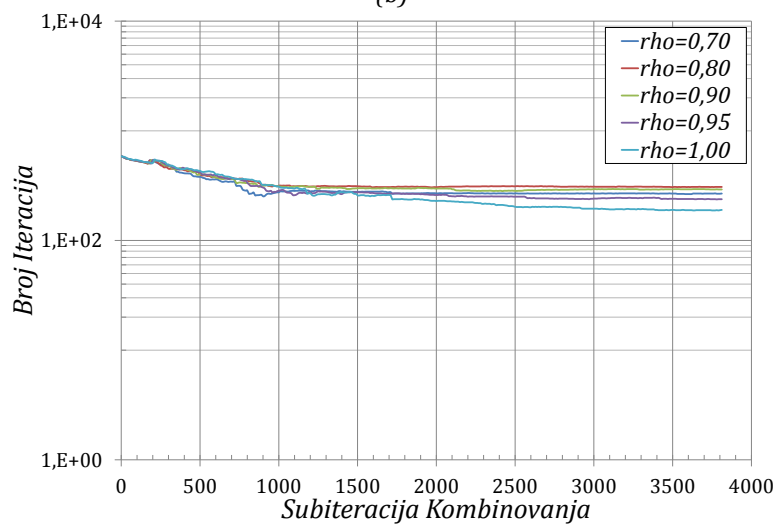
Za $L = 1$ metode FO i FP rezultuju identičnim težinskim koeficijentima. Usvajajući $M = 5$ kao dovoljno veliku vrednost za najmanje L i variranjem parametara ρ_{ii}/ρ_{ik} dobijaju se grafici prikazani na Slici 8.6. Na osnovu rezultata sa Slike 8.6 vrednost $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ se pokazuje kao veoma dobar izbor i usvaja se kao optimalna za potrebe analize uticaja drugih parametara. Ovo naročito važi za kondicioni broj. Vrednost $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 1$ daje na ovom primeru najbolje rezultate za broj iteracija, ali se ova vrednost ne usvaja kako bi se bolje iskoristio potencijal za smanjenje kvadrata Frobenijusove norme. Takođe, rezultati za $L = 3$ (nisu ovde prikazani) dodatno potvrđuju izbor vrednosti $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$.



(a)



(b)



(c)

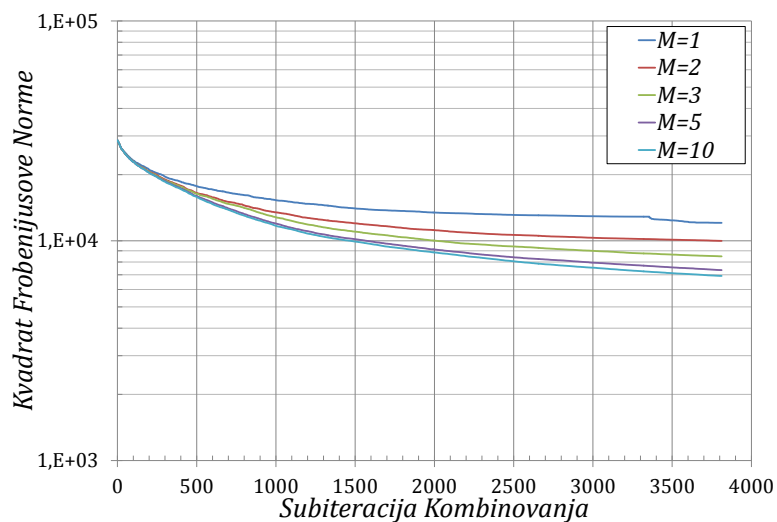
Slika 8.6 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za FO/FP metodu određivanja koeficijenata, $L = 1$, $M = 5$ i različite vrednosti parametra ρ_{ii}/ρ_{ik} : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.

Variranjem parametra M za $L = 1$ i usvojenu vrednost $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ za metode FO i FP se dobijaju grafici prikazani na Slici 8.7. Na sličan način se za $L = 2$ dobijaju grafici na Slici 8.8 za FO metodu i Slici 8.9 za FP metodu, a za $L = 3$ grafici na Slici 8.10 za FO metodu i Slici 8.11 za FP metodu. Na osnovu rezultata prikazanih na Slikama 8.7-8.11 vrednost parametra $M = 5$ se usvaja kao optimalna za $L = 1, 2, 3$ za već usvojenu vrednost $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i potrebe analize drugih parametara.

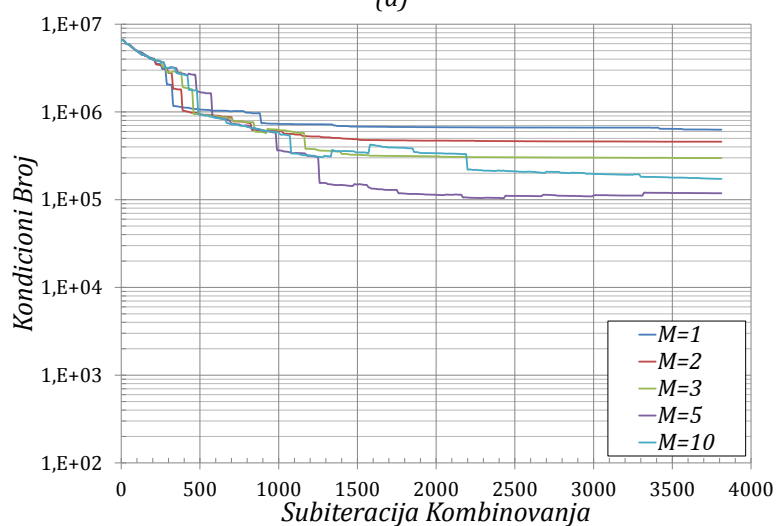
Kako P-Opt metoda ima dodatan parametar (α) u odnosu na metode FO i FP, efekti uticaja njegovog variranja su prikazani na Slici 8.12 za $L = 1, M = 5$ i $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$. Na osnovu tih rezultata je teško zaključiti koja bi vrednost parametra α bila optimalna, tako da je analiza ponovljena za $L = 3, M = 5$ i $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$. Rezultati te analize su prikazani na Slici 8.13, i na osnovu njih se zaključuje da je vrednost $\alpha = 0$ optimalna za posmatrani model i već usvojeni skup vrednosti drugih parametara.

Fiksiranjem $L = 1, M = 5$ i $\alpha = 0$ se za P-Opt metodu variranjem parametara ρ_{ii}/ρ_{ik} dobijaju grafici prikazani na Slici 8.14. Na osnovu tih rezultata se pokazuje da se i kod P-Opt metode može usvojiti vrednost $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$, kao i u slučaju FO i FP metode, kao optimalna. Iako se kod P-Opt metode za ovu vrednost parametra ρ_{ii}/ρ_{ik} dobija nešto veći broj iteracija, kondicioni broj je manji u odnosu na druge vrednosti ovog parametra. Dodatno, rezultati za $L = 3, M = 5, \alpha = 0$ i varijabilno ρ_{ii}/ρ_{ik} (nisu ovde prikazani) potvrđuju ovaj izbor.

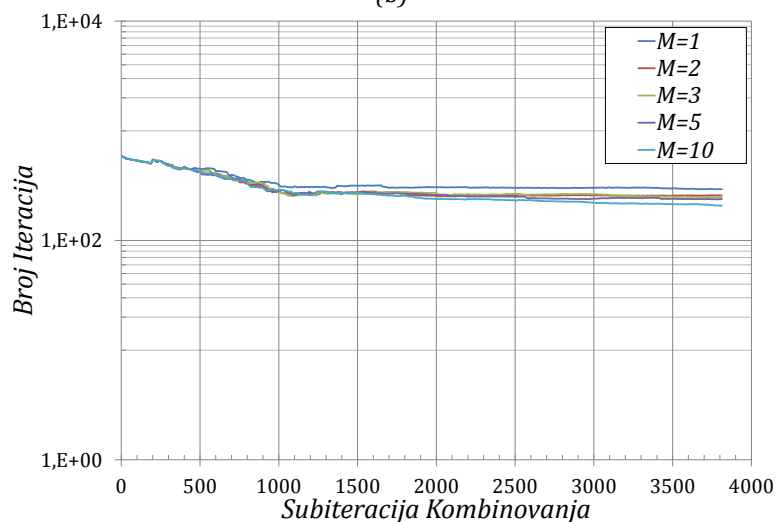
Familije krivih za $L = 1, L = 2$ i $L = 3$ i parametre $\alpha = 0$ i $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ P-Opt metode za različite vrednosti parametra M su prikazane na Slikama 8.15, 8.16 i 8.17, respektivno. Na osnovu rezultata prikazanih na ovim slikama se, kao i kod FO metode i FP metode, vrednost $M = 5$ pokazuje optimalnom za već usvojene vrednosti preostalih varijabilnih parametara.



(a)

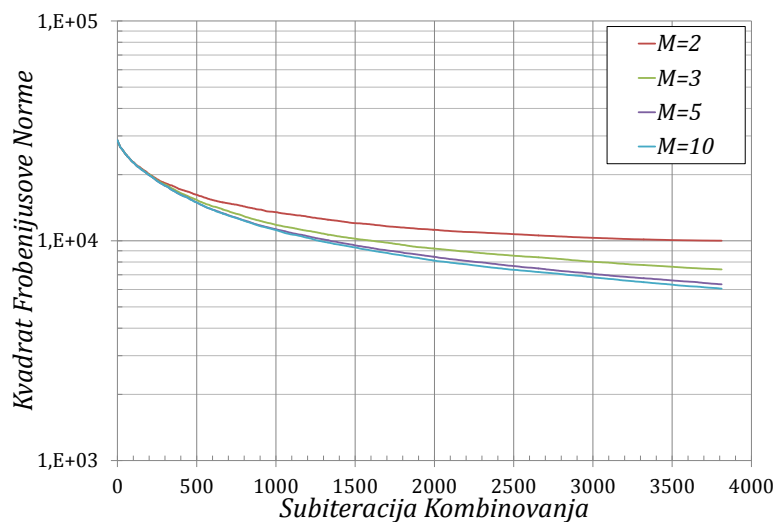


(b)

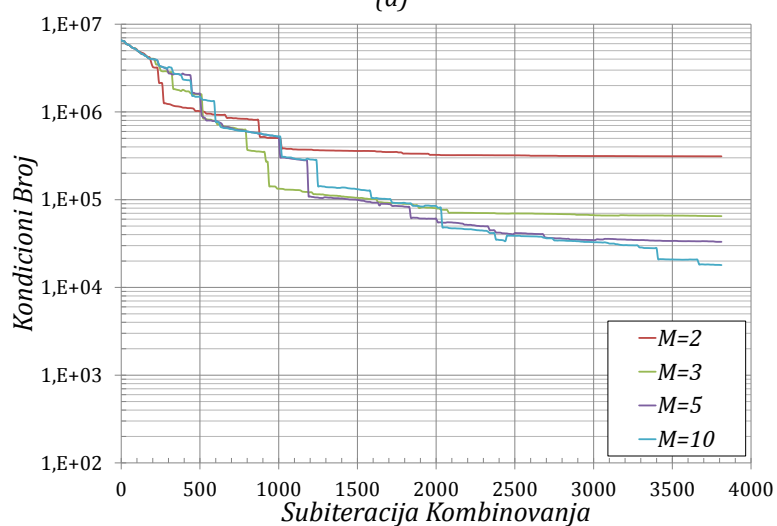


(c)

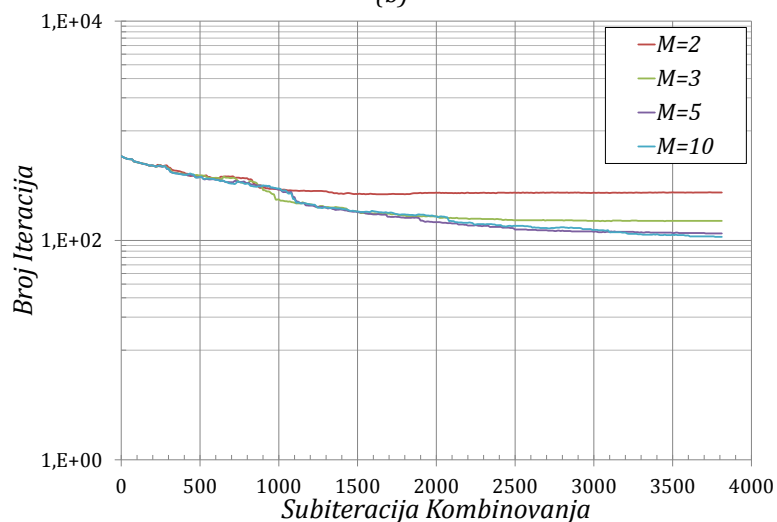
Slika 8.7 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za FO/FP metodu određivanja koeficijenata, $L = 1$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i različite vrednosti parametra M : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

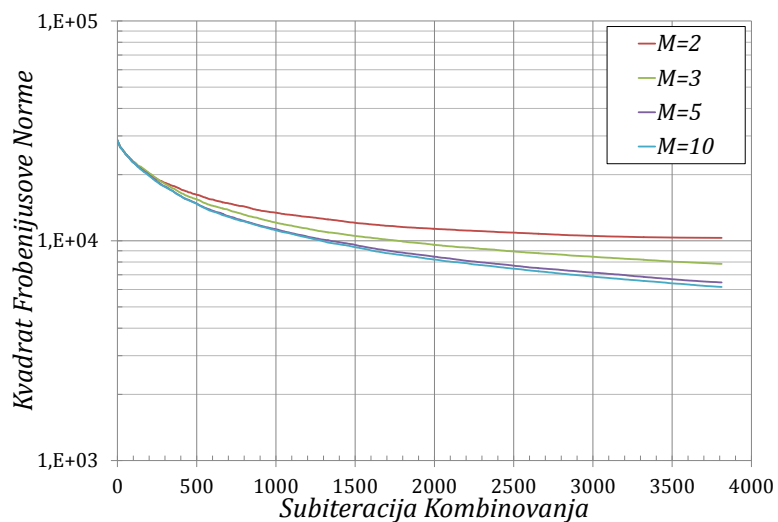


(b)

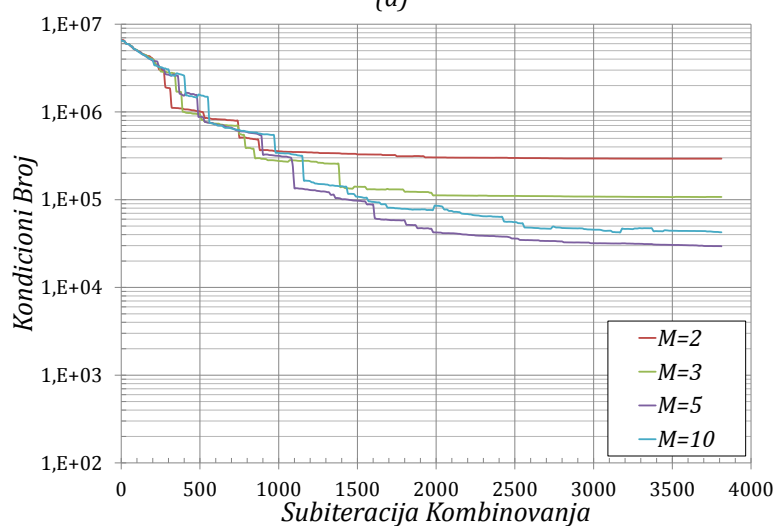


(c)

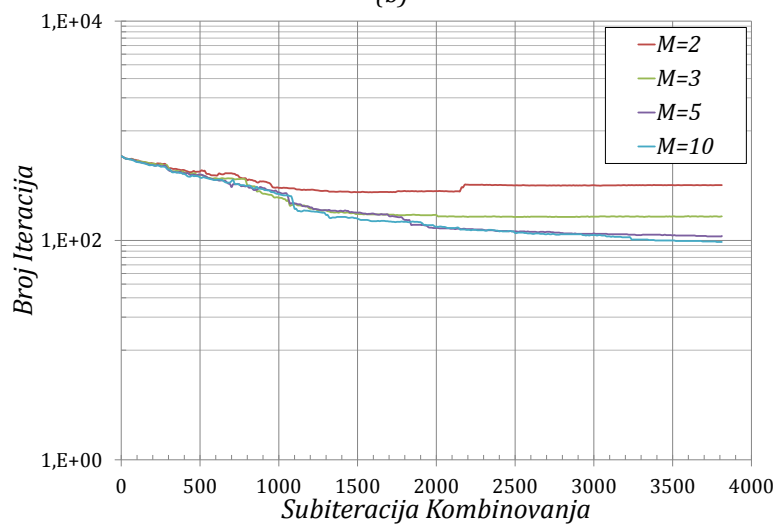
Slika 8.8 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za FO metodu određivanja koeficijenata, $L = 2$, $\rho_{ii} = 0,95$ i različite vrednosti parametra M : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

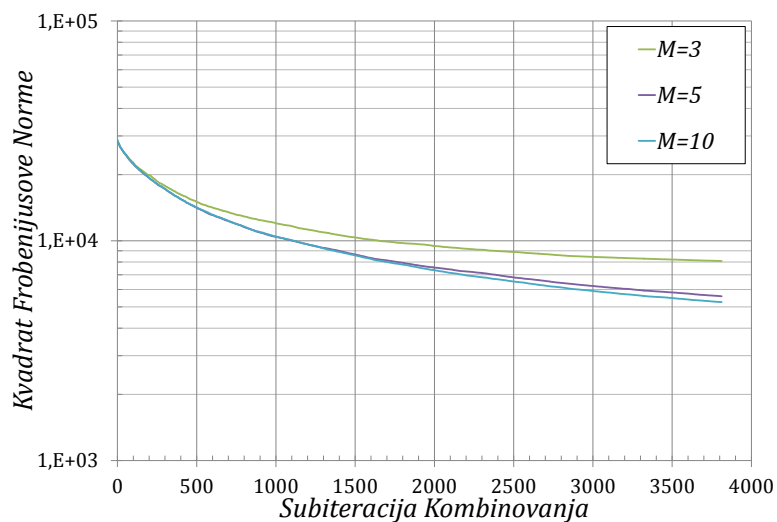


(b)

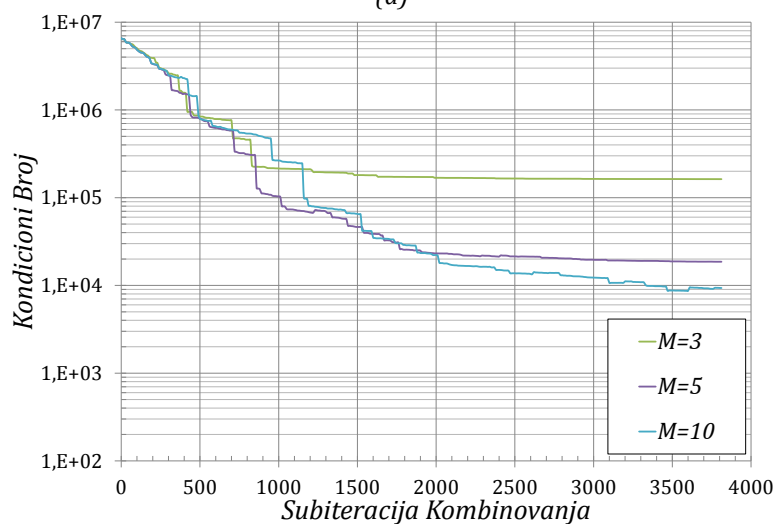


(c)

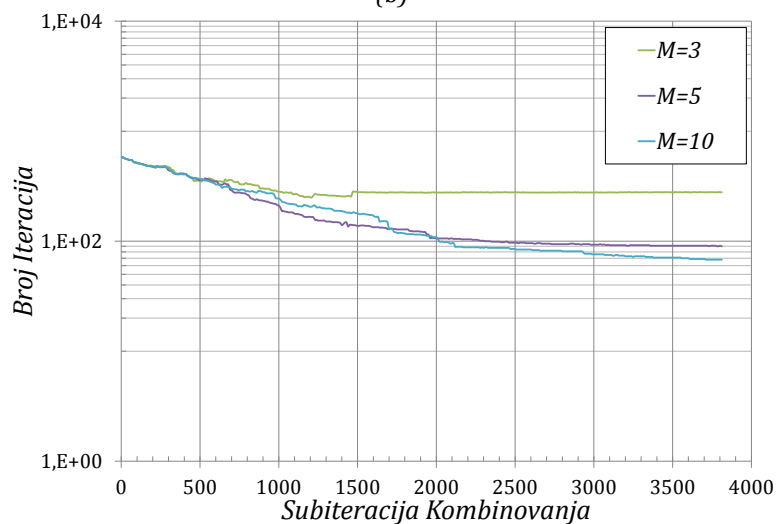
Slika 8.9 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za FP metodu određivanja koeficijenata, $L = 2$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i različite vrednosti parametra M : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

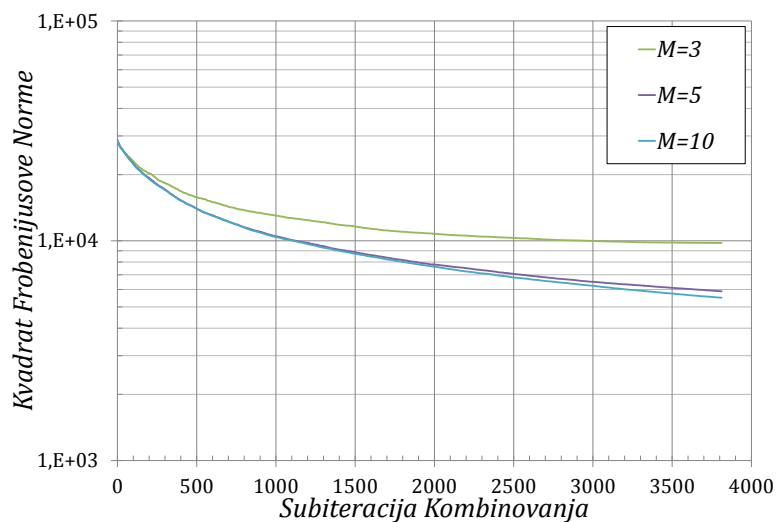


(b)

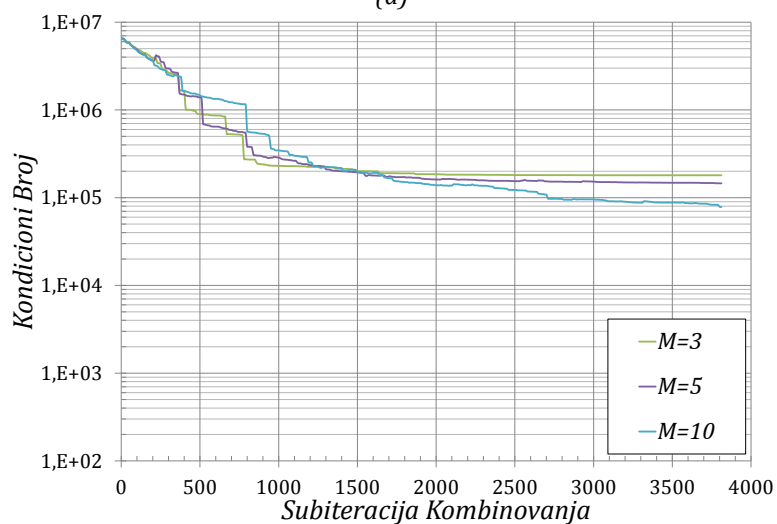


(c)

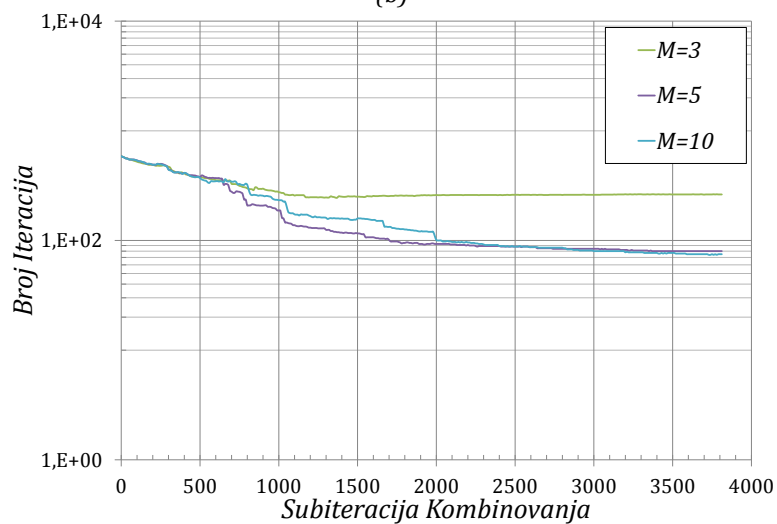
Slika 8.10 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za FO metodu određivanja koeficijenata, $L = 3$, $\rho_{ii} = 0,95$ i različite vrednosti parametra M : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

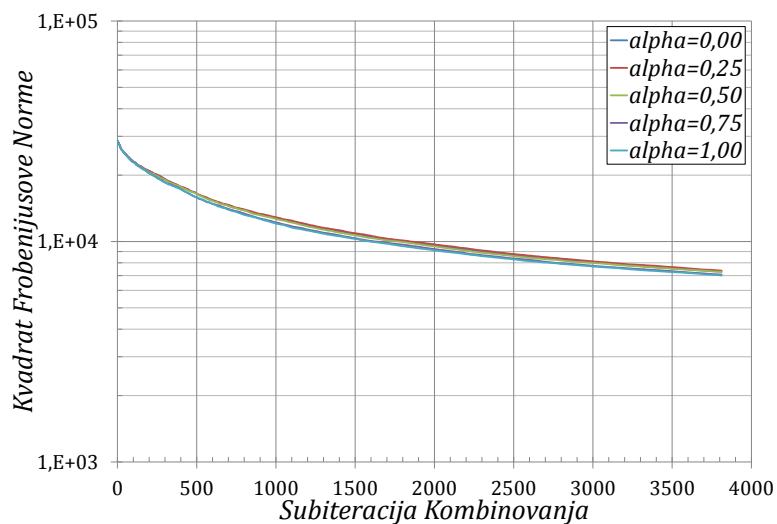


(b)

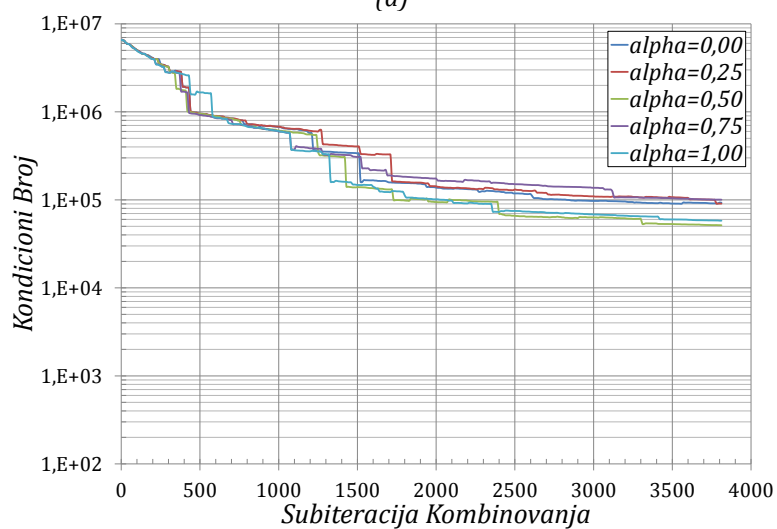


(c)

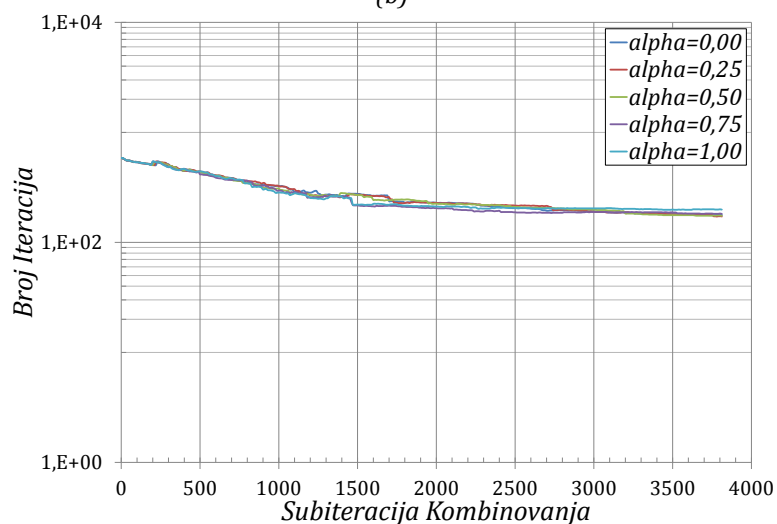
Slika 8.11 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za FP metodu određivanja koeficijenata, $L = 3$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i različite vrednosti parametra M : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

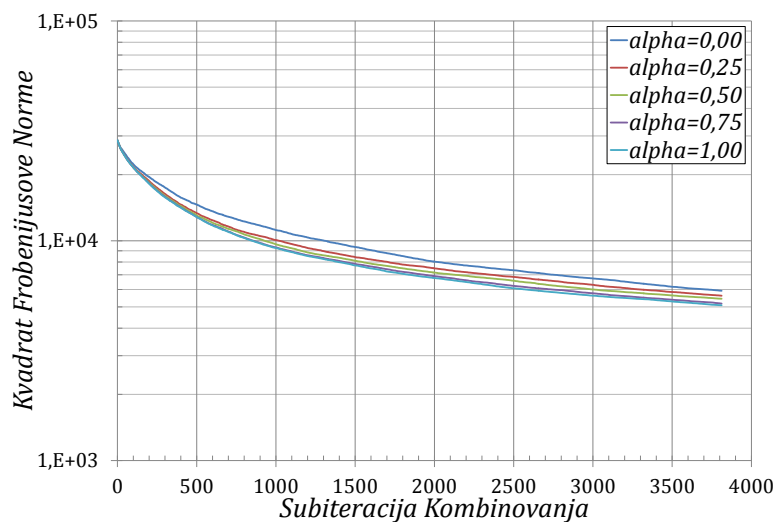


(b)

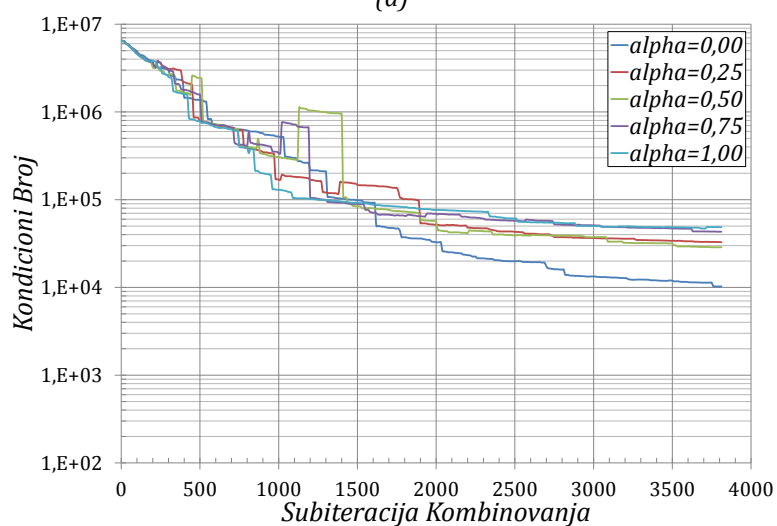


(c)

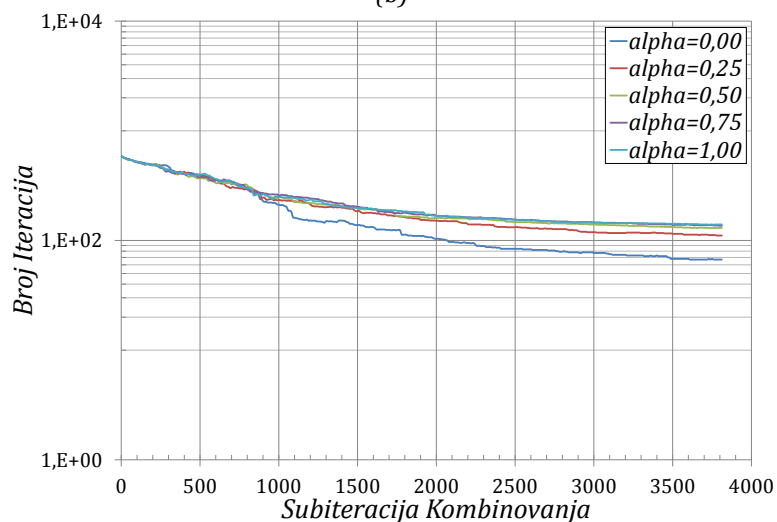
Slika 8.12 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za P-Opt metodu određivanja koeficijenata, $L = 1$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$, $M = 5$ i različite vrednosti parametra α : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

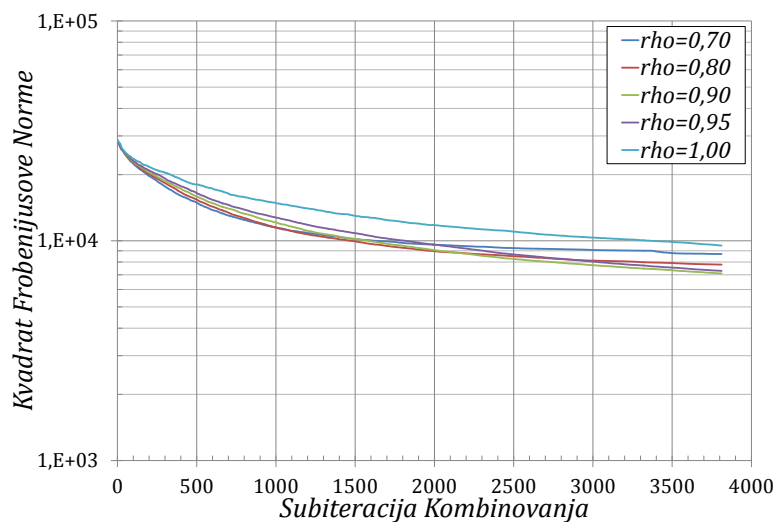


(b)

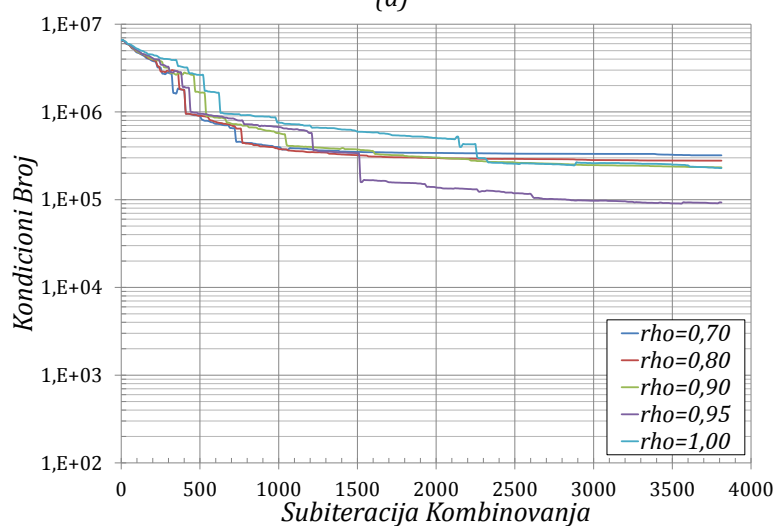


(c)

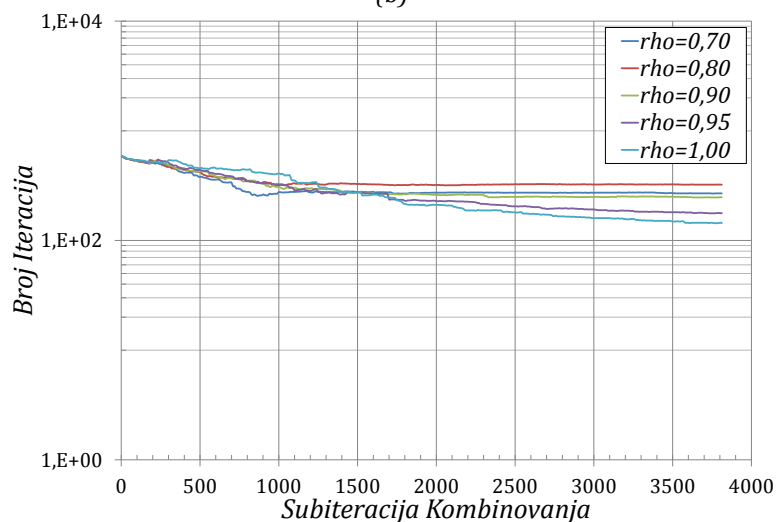
Slika 8.13 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za P-Opt metodu određivanja koeficijenata, $L = 3$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$, $M = 5$ i različite vrednosti parametra α : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

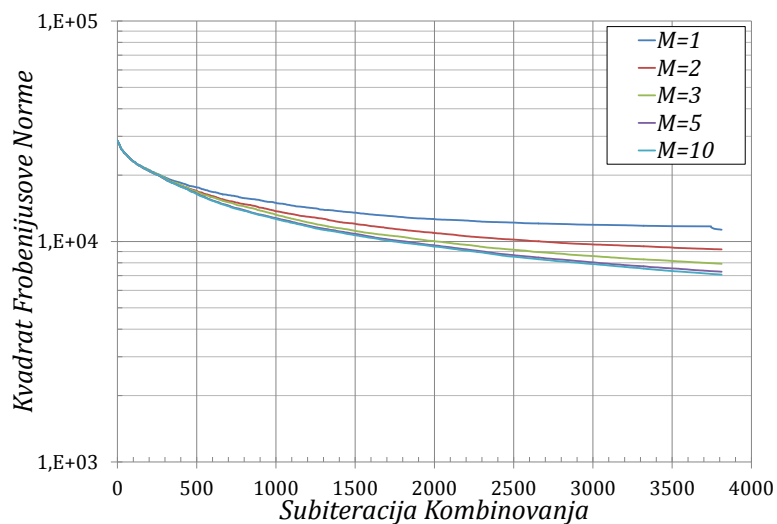


(b)

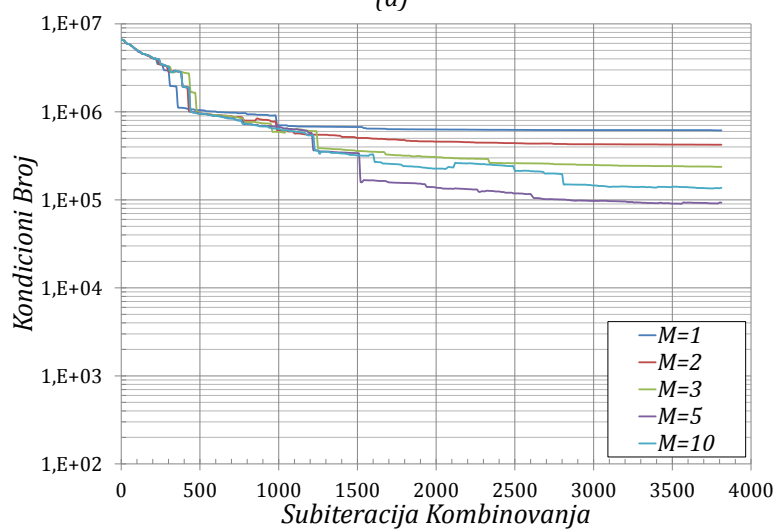


(c)

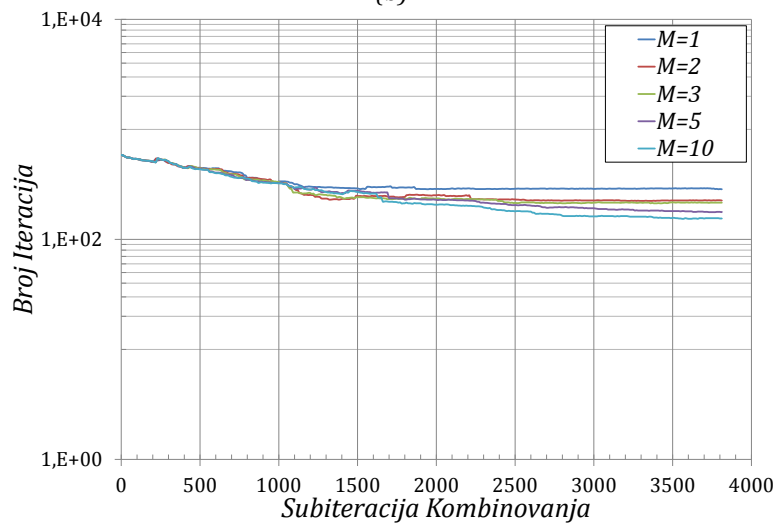
Slika 8.14 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za P-Opt metodu određivanja koeficijenata, $L = 1$, $\alpha = 0$, $M = 5$ i različite vrednosti parametra ρ_{ii}/ρ_{ik} : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

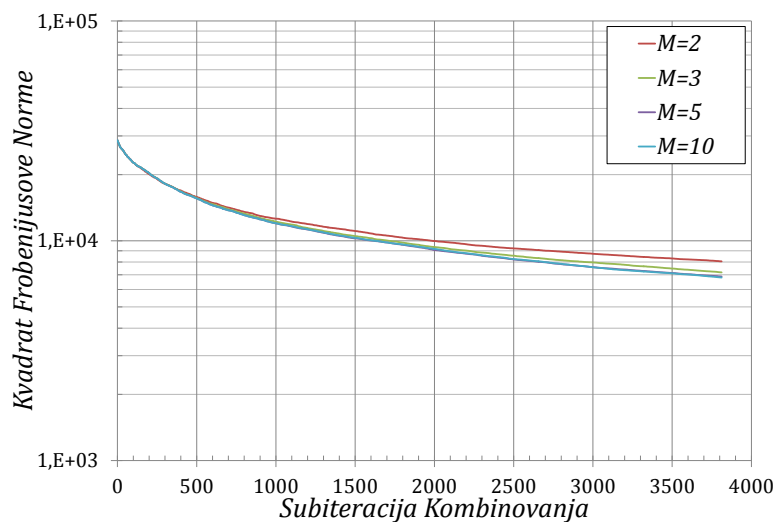


(b)

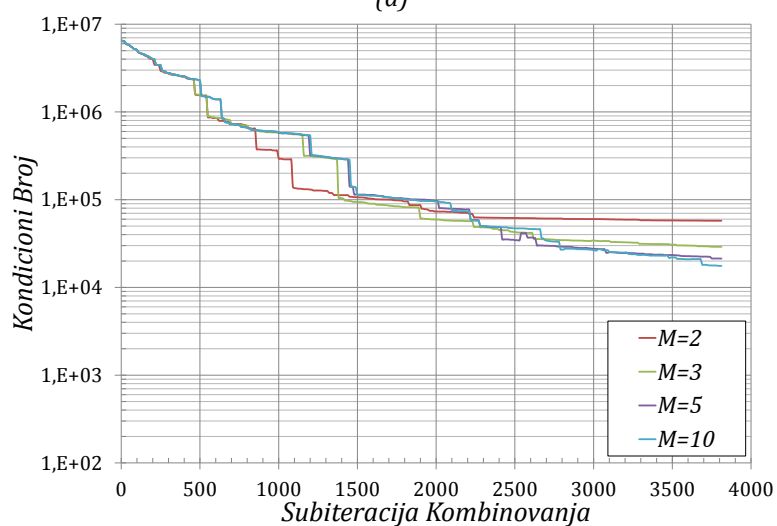


(c)

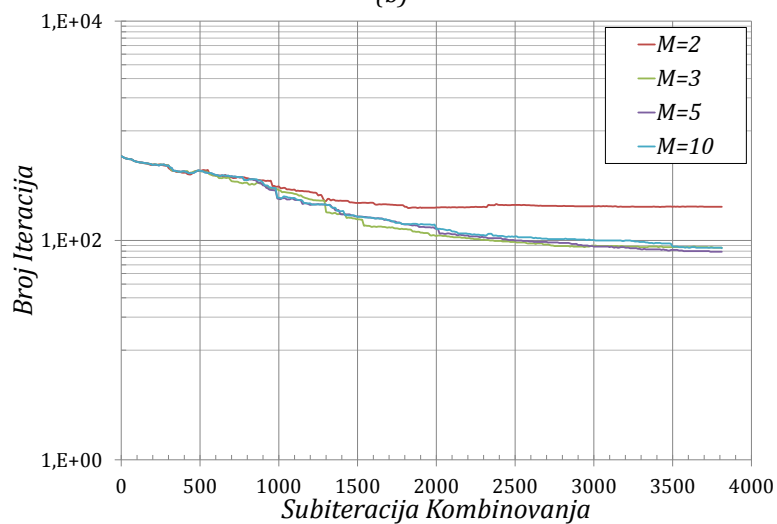
Slika 8.15 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za P-Opt metodu određivanja koeficijenata, $L = 1$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i različite vrednosti parametra M : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

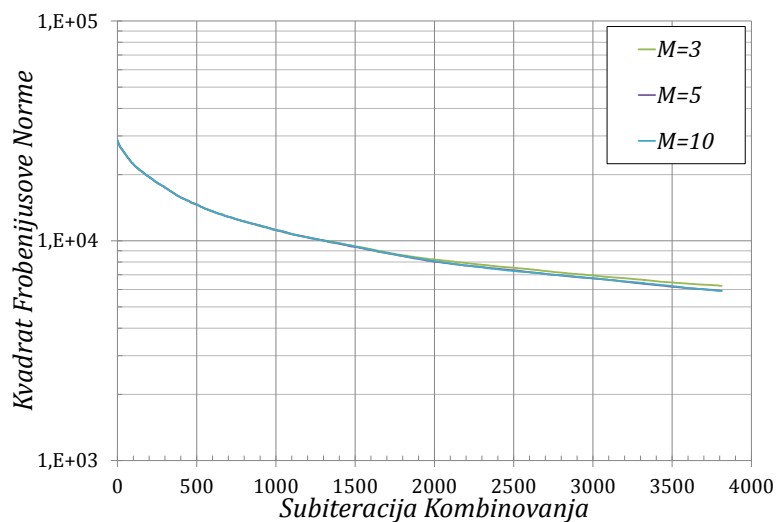


(b)

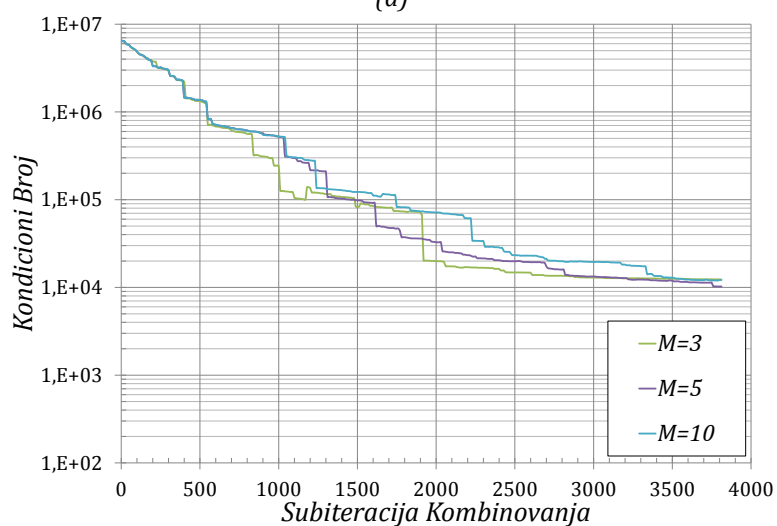


(c)

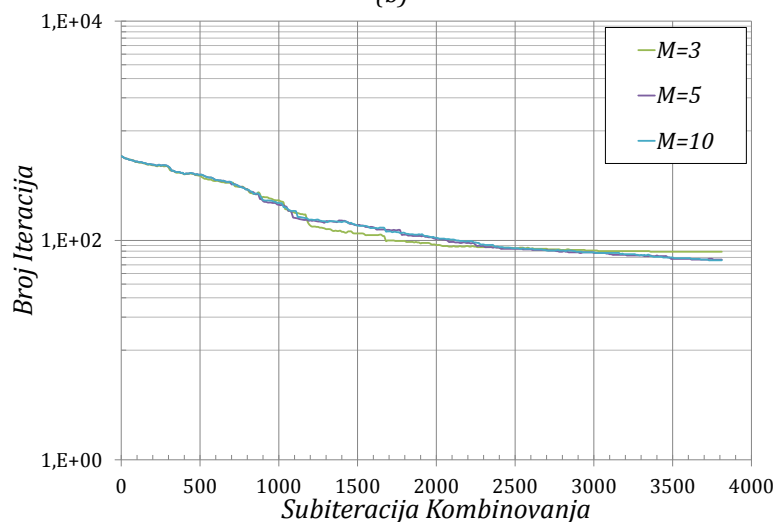
Slika 8.16 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za P-Opt metodu određivanja koeficijenata, $L = 2$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i različite vrednosti parametra M : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)



(b)



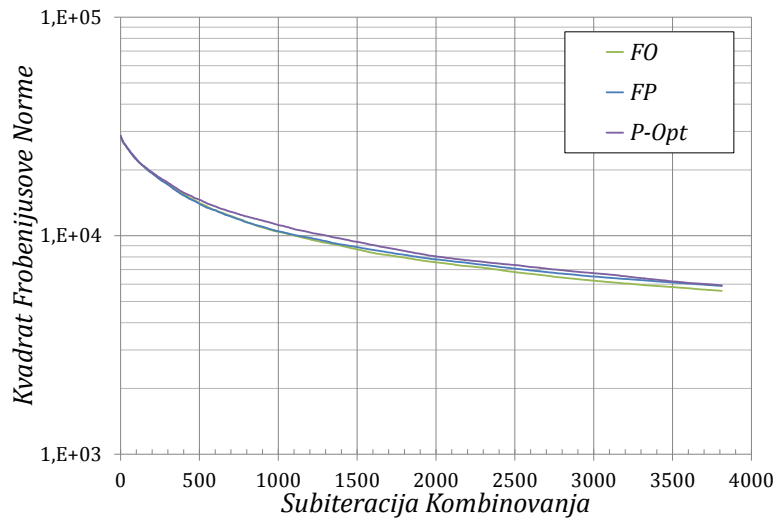
(c)

Slika 8.17 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za P-Opt metodu određivanja koeficijenata, $L = 3$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i različite vrednosti parametra M : a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.

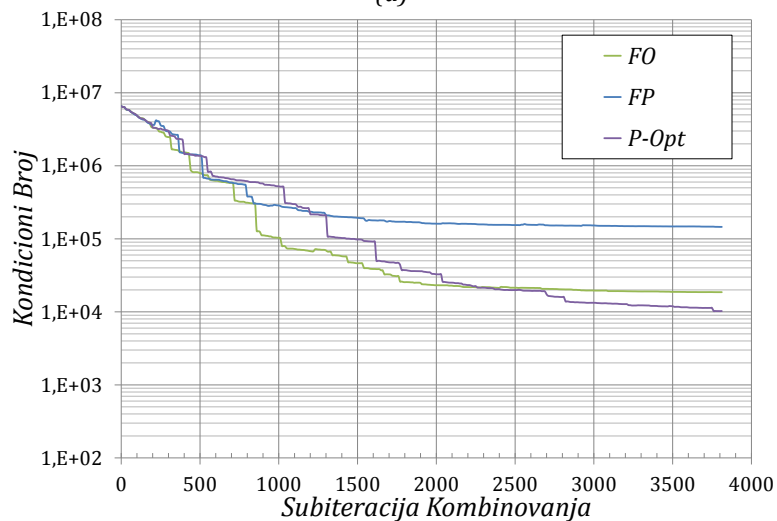
Usvajajući parametre $L = 3$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i $M = 5$ za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i koristeći klasične funkcije bazisa višeg reda generisani su rezultati sa ciljem međusobnog poređenja metoda određivanja težinskih koeficijenata FO, FP i P-Opt. Ovi rezultati su prikazani na Slici 8.18. Za isti model, uz korišćenje maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa su dobijeni rezultati za metode FO, FP i P-Opt i prikazani na Slici 8.19.

Za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom i koristeći klasične funkcije bazisa višeg reda generisani su rezultati sa ciljem međusobnog poređenja metoda određivanja težinskih koeficijenata FO, FP i P-Opt sa parametrima $L = 3$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$ i $M = 5$. Ovi rezultati su prikazani na Slici 8.20. Koristeći maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa za isti model i iste vrednosti parametara dobijeni su rezultati za metode FO, FP i P-Opt i prikazani na Slici 8.21.

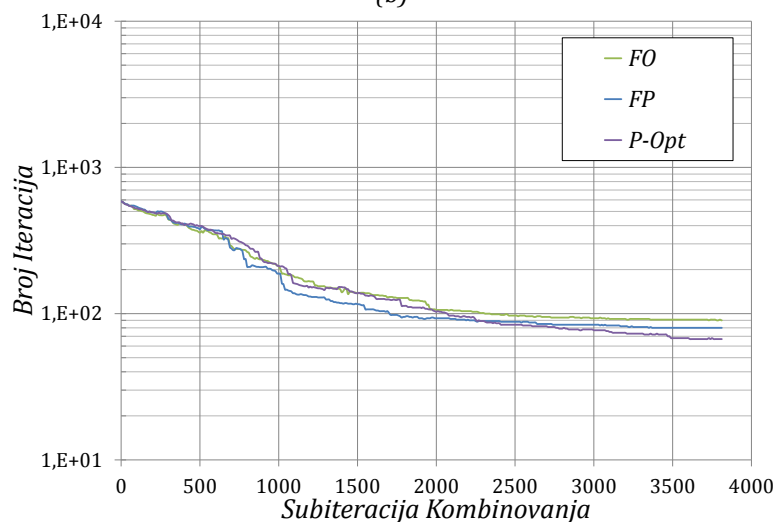
Na osnovu rezultata prikazanih na Slikama 8.18-8.21 evidentno je da primena FP metode rezultuje nešto slabijim performansama u odnosu na druge dve metode, kao i da P-Opt metoda ima nešto bolje performanse od FO metode.



(a)

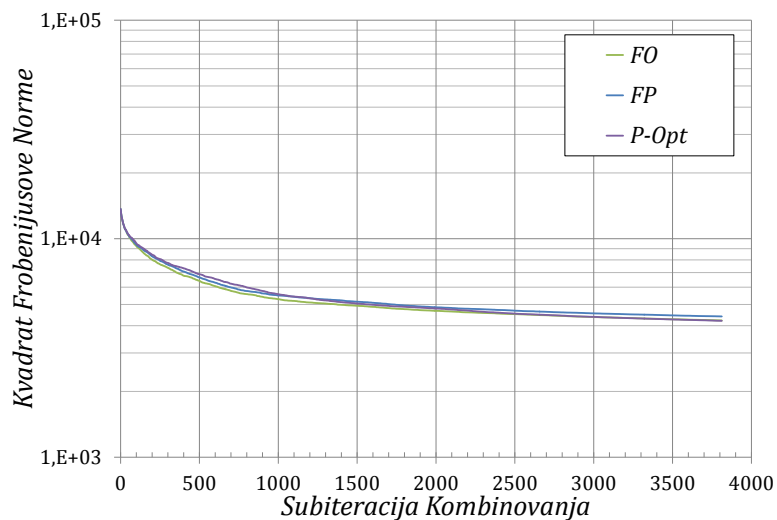


(b)

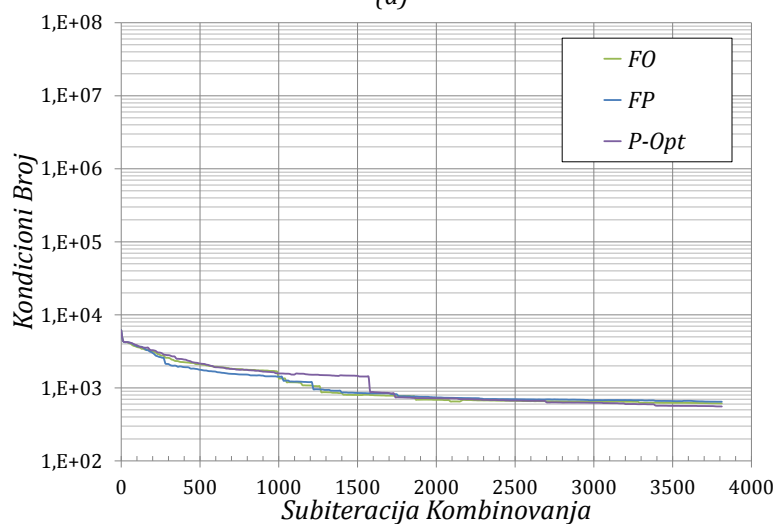


(c)

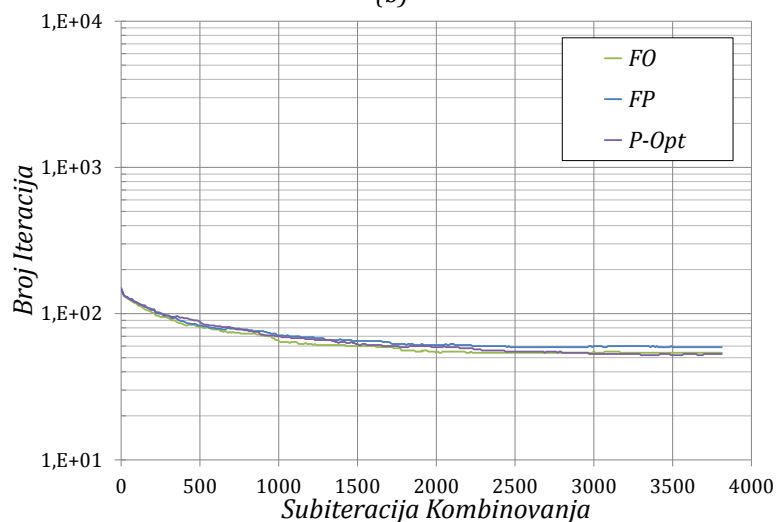
Slika 8.18 Poređenje karakteristika linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za $L = 3$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$, $M = 5$ i različite metode određivanja koeficijenata: a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

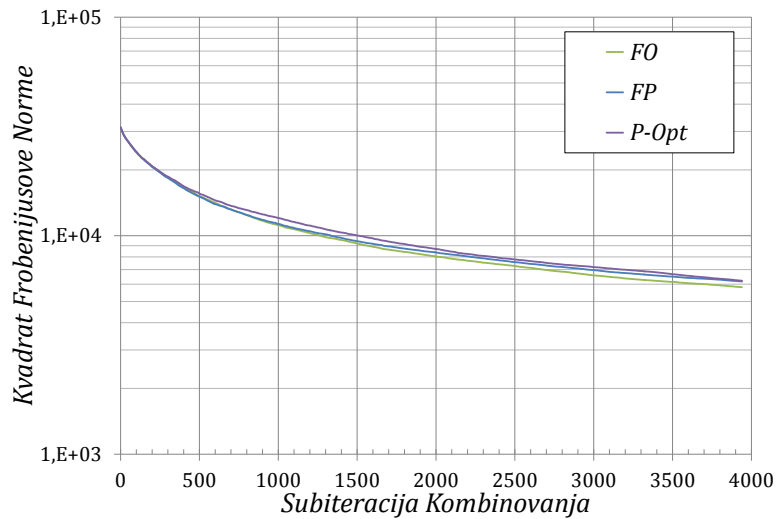


(b)

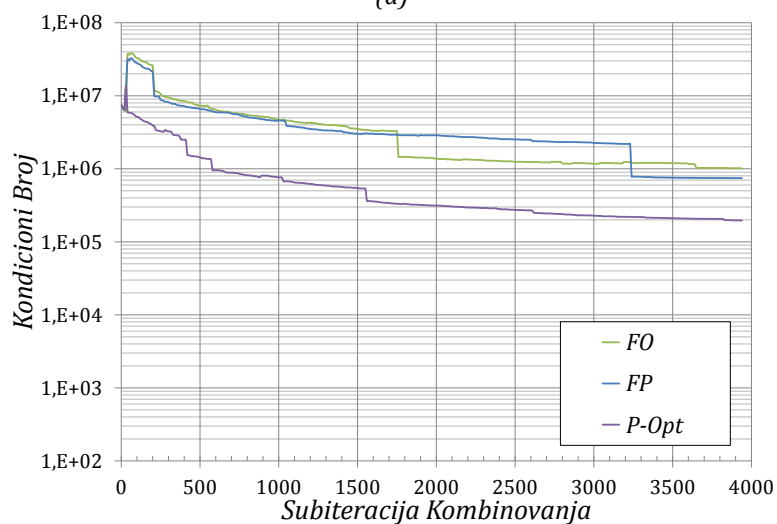


(c)

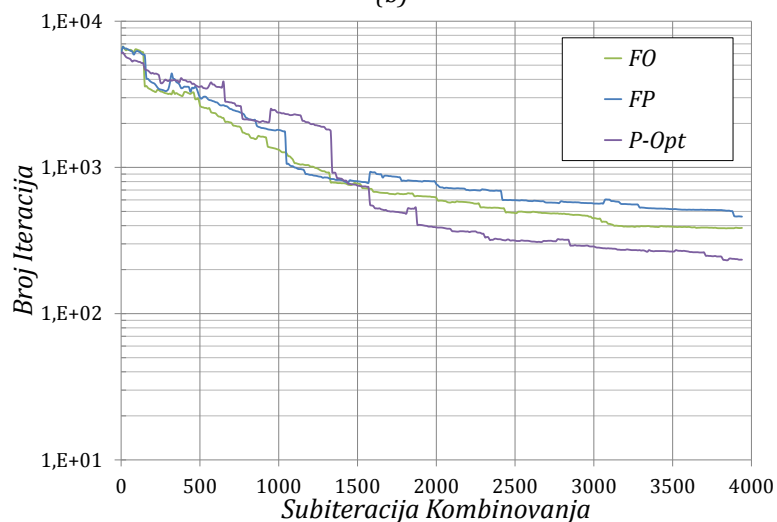
Slika 8.19 Poređenje karakteristika linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa) za $L = 3$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$, $M = 5$ i različite metode određivanja koeficijenata: a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

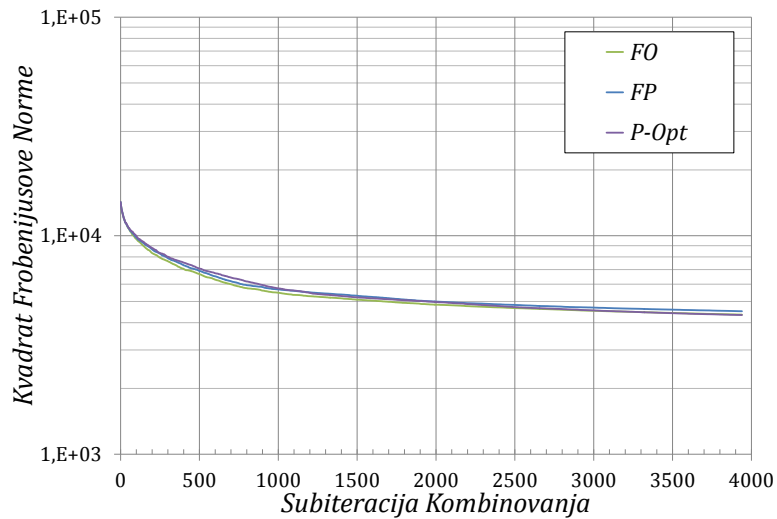


(b)

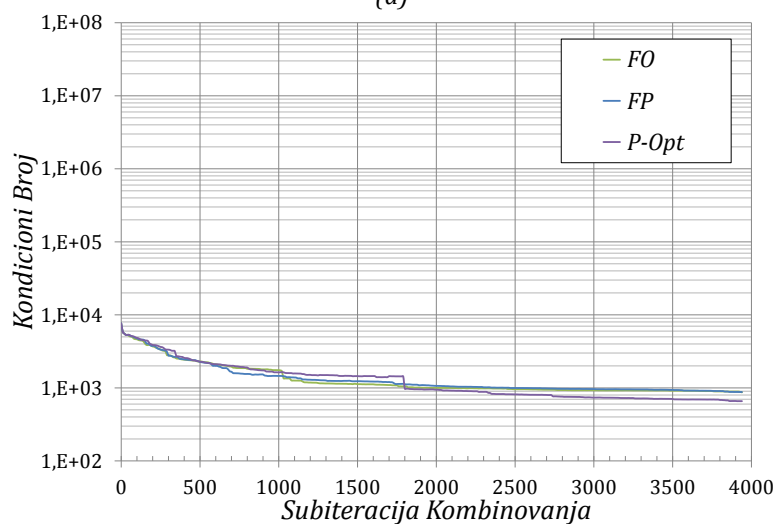


(c)

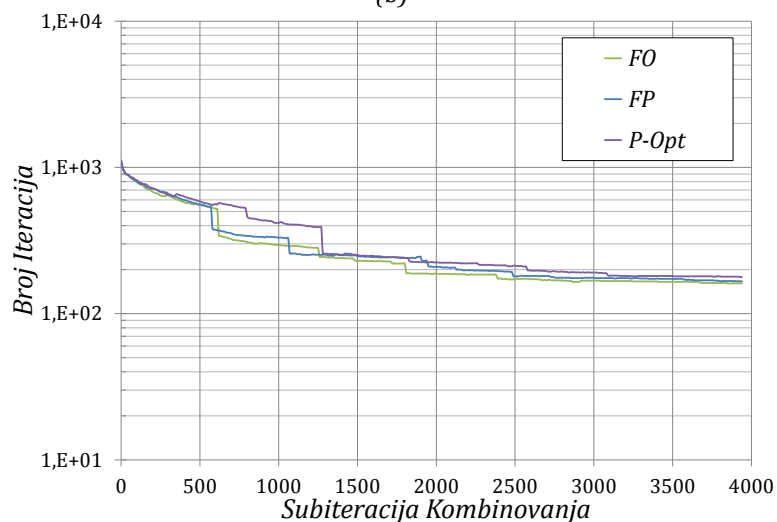
Slika 8.20 Poređenje karakteristika linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom (klasične funkcije bazisa višeg reda) za $L = 3$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$, $M = 5$ i različite metode određivanja koeficijenata: a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)



(b)



(c)

Slika 8.21 Poređenje karakteristika linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom (maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa) za $L = 3$, $\alpha = 0$, $\rho_{ii}/\rho_{ik} = 0,95$, $M = 5$ i različite metode određivanja koeficijenata: a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.

8.6.3. Broj skalarnih proizvoda i uspešnost linearnog kombinovanja vrsta/kolona za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom

Za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom (Slika 4.1b) su određeni procenti uspešnog linearnog kombinovanja vrsta/kolona za $L = 1, 2, 3$ posle $N = 1970$ subiteracija linearnog kombinovanja za metode određivanja težinskih koeficijenata FO, FP i P-Opt (uz vrednost odgovarajućih parametara od 0,95, kao i 0 za dodatni parametar P-Opt metode).

Takođe je određen i broj skalarnih proizvoda koji se koriste pri određivanju težinskih koeficijenata za svaku od metoda. Svi ovi rezultati su dati u Tabeli 8.3.

Tabela 8.3 Karakteristike linearnog kombinovanja za $L = 1, 2, 3$ sa $N = 1970$ subiteracija za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom uz upotrebu maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa.

<i>Metoda izbora koeficijenata</i>	<i>Broj kombinovanja</i>	<i>Procenat kombinovanja [%]</i>	<i>Broj skalarnih proizvoda</i>	<i>Prosečan broj skalarnih proizvoda po subiteraciji</i>	<i>Prosečan broj skalarnih proizvoda po kombinovanju</i>
<i>L = 1</i>					
<i>FO</i>	1456	73,9086	12990	6,5939	8,9217
<i>FP</i>	1456	73,9086	12990	6,5939	8,9217
<i>P-Opt</i>	1624	82,4365	11386	5,7797	7,0111
<i>L = 2</i>					
<i>FO</i>	1481	75,1777	23689	12,0249	15,9953
<i>FP</i>	1469	74,5685	24264	12,3168	16,5174
<i>P-Opt</i>	1752	88,9340	18842	9,5645	10,7546
<i>L = 3</i>					
<i>FO</i>	1438	72,9949	28831	14,6350	20,0494
<i>FP</i>	1392	70,6599	29792	15,1228	21,4023
<i>P-Opt</i>	1722	87,4111	25207	12,7954	14,6382

Iako metoda P-Opt ima najveći procenat uspešnog kombinovanja vrsta/kolona i najmanji broj potrebnih skalarnih proizvoda da bi se odredili težinski koeficijenti, zbog dodatnog koraka optimizacije koji zahteva višestruko rešavanje sistema linearnih jednačina metode FO i FP se nameću kao bolji izbor.

Zbog većeg procenta uspešnog kombinovanja i nešto manjeg broja potrebnih skalarnih proizvoda metoda FO se pokazuje boljom u odnosu na metodu FP.

8.6.4. Linearno kombinovanje sa do $L = 9$ vrsta/kolona na modelima lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom i četvrt-talasnom monopol antenom

Na modele lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (Slika 4.1a) i četvrt-talasnom monopol antenom (Slika 4.1b) je primenjeno linearno kombinovanje vrsta/kolona sa do $L = 9$ vrsta/kolona koristeći pritom klasične i maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa višeg reda. Broj vrsta koje se koriste prilikom testiranja je usvojen kao $M = L + k$, $k = 1, 2, 3$, dok se težinski koeficijenti linearnog kombinovanja (na osnovu razmatranja u prethodnom poglavlju) određuju FO metodom (uz vrednost odgovarajućeg parametra od 0,95).

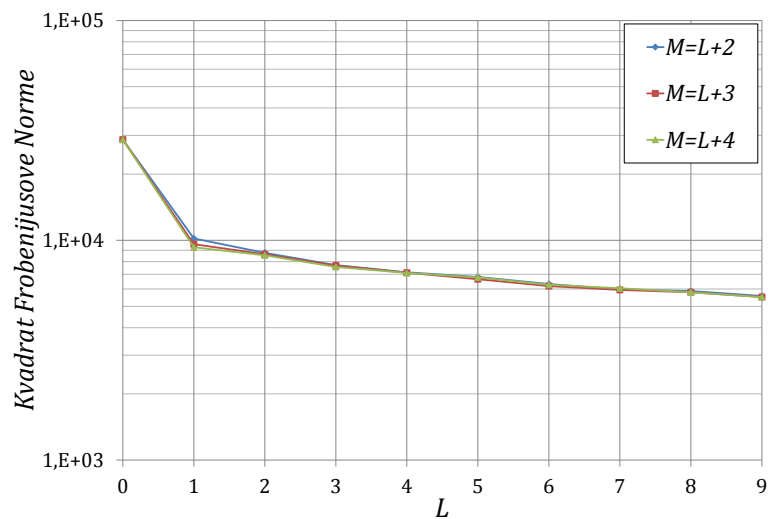
Na Slikama 8.22-8.25 su prikazane karakteristike linearnog kombinovanja vrsta/kolona za razmatrane modele i tipove funkcija bazisa višeg reda.

Na osnovu ovih rezultata mogu se izvesti sledeći zaključci:

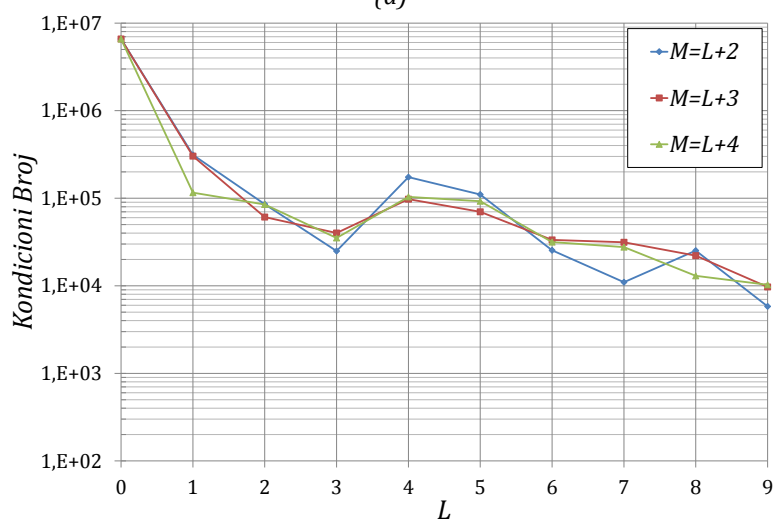
- povećanjem L rezultati za kondicioni broj i broj iteracija se generalno poboljšavaju;
- najznačajnija (relativna, kao i apsolutna) poboljšanja se dobijaju za $L = 1$;
- za $L > 1$ relativna poboljšanja sa jediničnim porastom parametra L generalno opadaju.

Tako se kondicioni broj za $L = 1$ smanjuje za oko 95% kad se koriste klasične funkcije bazisa višeg reda, dok se kod maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa smanjuje za oko 80%. Za $L > 1$ relativna smanjenja kondicionog broja se kreću do 70% za klasične funkcije bazisa višeg reda, odnosno do 20% za maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa.

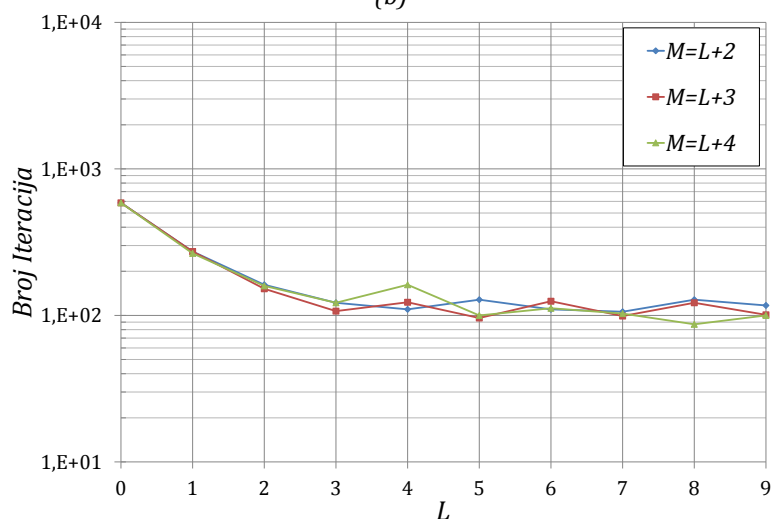
Analogno tome, broj iteracija se za $L = 1$ smanjuje za do 80% kad se koriste klasične funkcije bazisa višeg reda, dok se kod maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa smanjuje za do 70%. Za $L > 1$ relativna smanjenja su znatno manja, i generalno nešto veća u slučaju klasičnih funkcija bazisa višeg reda u odnosu na maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa.



(a)

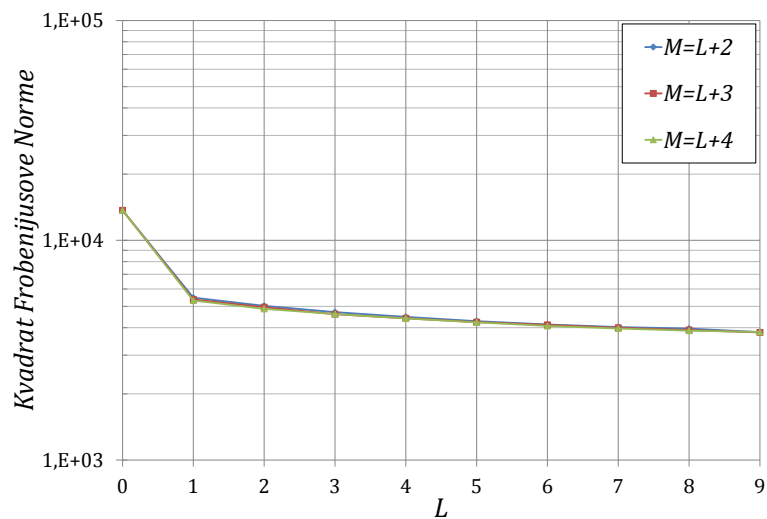


(b)

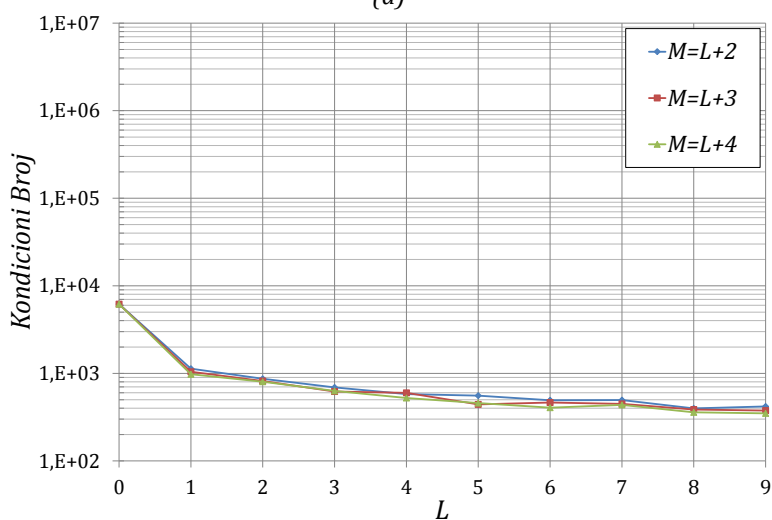


(c)

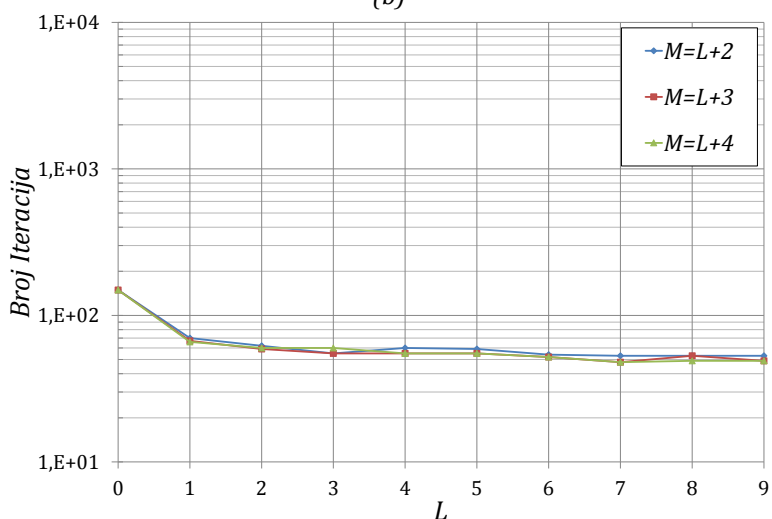
Slika 8.22 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (klasične funkcije bazisa višeg reda) do $L = 9$: a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

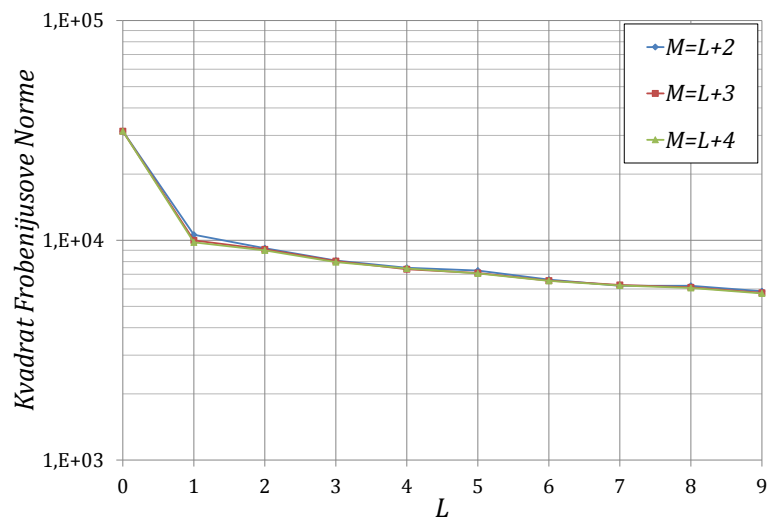


(b)

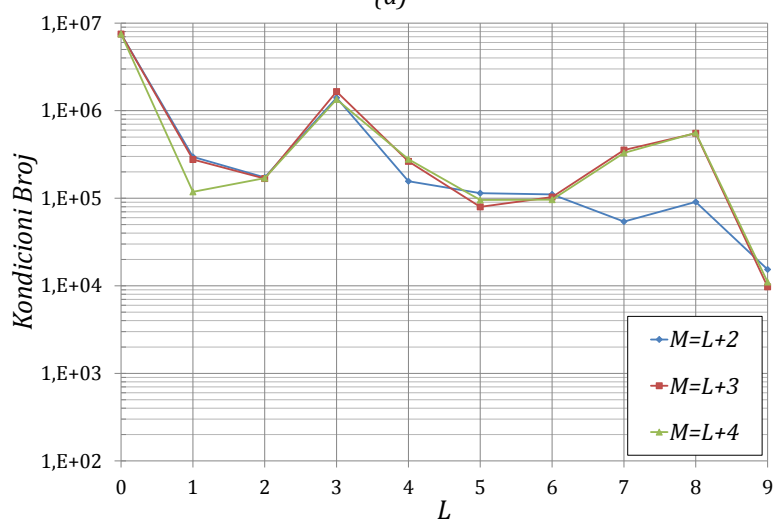


(c)

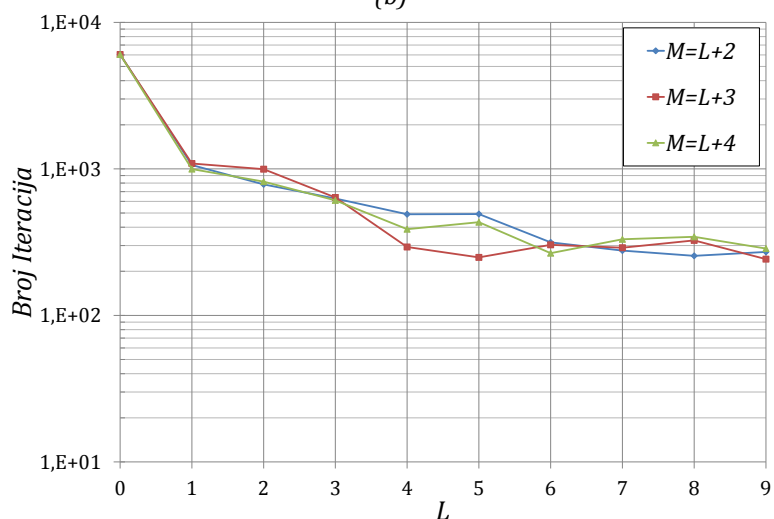
Slika 8.23 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog ravnim talasom (maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa) do $L = 9$: a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)

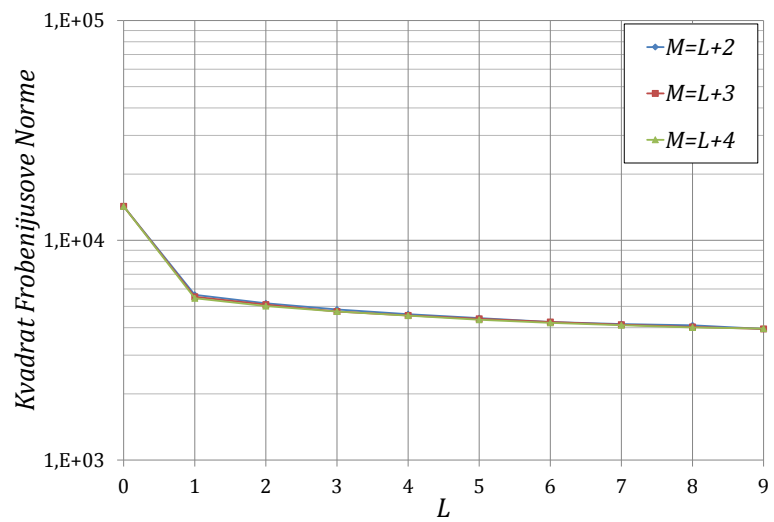


(b)

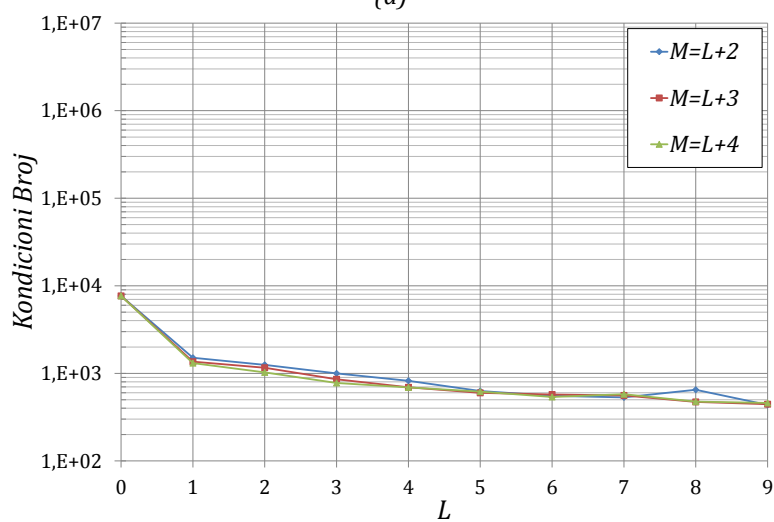


(c)

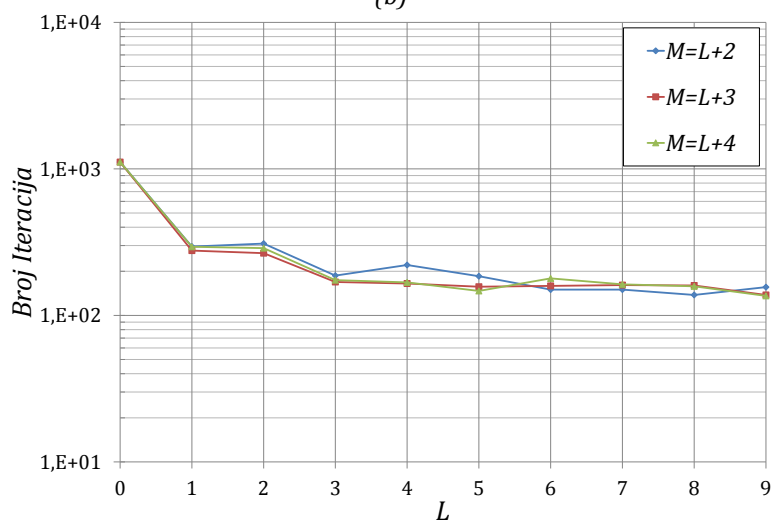
Slika 8.24 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom (klasične funkcije bazisa višeg reda) do $L = 9$: a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.



(a)



(b)



(c)

Slika 8.25 Karakteristike linearnog kombinovanja za model lovačkog aviona pobuđenog četvrt-talasnom monopol antenom (maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa) do $L = 9$: a) kvadrat Frobenijusove norme, b) kondicioni broj, c) broj iteracija.

8.7. Rezime

Koncept ortogonalizacije, kojim se efikasno ublažava problem visokog kondicionog broja kod jednostavnih hijerarhijskih (klasičnih) funkcija bazisa viših redova, se može primeniti i na nivou MoM matrice. Kod maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa zahteva se da je maksimalan broj unutrašnjih proizvoda funkcija bazisa jednak nuli. Kod postupka prekondicioniranja predstavljenog u ovoj glavi cilj je da što veći broj skalarnih proizvoda vrsta/kolona ima što manji modul (idealno nula). Pokazalo se da je pritom neophodno i da ne dolazi do povećanja Frobenijusove norme matrice sistema. Koeficijenti linearnog kombinovanja kod maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa su čisto realni, dok su kod ovde razmatranog postupka prekondicioniranja kompleksni, što je omogućeno modifikacijom Galerkinovog testiranja redefinisanjem unutrašnjeg proizvoda. Linearno kombinovanje funkcija bazisa je generalan postupak, dok postupak ortogonalizacije koji se primenjuje kod maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa predstavlja samo jedan njegov podskup. Novim postupkom prekondicioniranja se održava simetrija matrice kod inicijalno simetričnih sistema. Efekti predloženog postupka prekondicioniranja su demonstrirani na primerima lovačkog aviona i uz upotrebu kako klasičnih funkcija bazisa višeg reda, tako i maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa. Prikazane su tri metode određivanja težinskih koeficijenata i uticaji pojedinačnih parametara na kondicioni broj matrice sistema i broj iteracija korišćenog iterativnog postupka. Na osnovu dobijenih rezultata je odabran optimalan skup parametara i za jednu od metoda je analiziran kondicioni broj i broj iteracija u zavisnosti od broja vrsta/kolona koje se koriste za linearno kombinovanje. Pokazalo se da se upotrebom jedne vrste/kolone za linearno kombinovanje kondicioni broj može smanjiti oko 20 puta kod klasičnih funkcija bazisa višeg reda, dok kod maksimalno ortogonalizovanih funkcija ovo smanjenje iznosi oko 5 puta. Istovremeno, broj iteracija se smanjuje od 2 do 6 puta, u zavisnosti od primera i korišćenog tipa funkcija bazisa višeg reda, pri čemu je smanjenje izraženije kod klasičnih funkcija bazisa višeg reda.

9. Zaključci

U ovoj disertaciji je razmatrano elektromagnetsko modelovanje koje se zasniva na površinskim integralnim jednačinama, funkcijama bazisa višeg reda i metodi momenata sa Galerkinovim testiranjem. I pored toga što je ova forma elektromagnetskog modelovanja izuzetno tačna i efikasna za veliki broj klasa problema u poređenju sa drugim metodama, postoji niz problema koji zbog svoje složenosti i električne veličine zahtevaju mnogo veće računarske resurse od onih koji nam standardno stoje na raspolaganju. U cilju proširenja ovih granica istražuju se razne tehnike, a među njima posebno primena iterativnih metoda za rešavanje matrične jednačine dobijene metodom momenata. Međutim, uspešnost iterativnih postupaka, koja se meri malim brojem iteracija potrebnim za rešenje matrične jednačine, nije zagarantovana izborom optimalnog iterativnog postupka, već je za to po pravilu potrebno i da matrica sistema ima mali kondicioni broj. Na jednoj strani pokazuje se da korišćenje standardnih prekondicionera, čiji je zadatak da smanje kondicioni broj matrice sistema, nije naročito uspešno u slučaju proizvoljne kombinacije površinskih integralnih jednačina ili proizvoljnog tipa funkcija bazisa višeg reda. Na drugoj strani pokazuje se da se smanjenje kondicionog broj i broja iteracija može postići: 1) ujednačavanjem veličina izvora i polja u površinskim integralnim jednačina i funkcija bazisa / test funkcija koje se koriste za njihovo rešavanje i 2) povećavanjem međusobne ortogonalnosti funkcija bazisa / test funkcija i vrsta/kolona matrice koja se dobija njihovom primenom.

U ovoj disertaciji je pokazano da se bilo koji tip ujednačavanja veličina izvora i polja u površinskim integralnim jednačinama, kao i funkcija bazisa / test funkcija može izvesti pomoću matrične ekvibracije. Takođe je pokazano da se razni tipovi ujednačavanja mogu postići matričnim ekvibracijama koje se baziraju na ujednačavanju: 1) dijagonalnih elemenata matrice i 2) normi vrsta i kolona matrice. U disertaciji je predložen i nov način matrične ekvibracije (prošireno dijagonalno skaliranje) koji se bazira na kombinaciji ova dva tipa ekvibracije, a

koji rezultuje znatno manjim kondicionim brojem i znatno manjim broj iteracija od svih proučenih tipova ujednačavanja i matrične ekvibracije.

Najveće pažnja u disertaciji je posvećena postupcima ortogonalizacije kako funkcija bazisa / test funkcija, tako i vrsta/kolona matrične jednačine koja se dobija primenom metode momenata.

Prvo je u opštem obliku pokazano da se linearno kombinovanje funkcija bazisa i test funkcija može na jednoj strani predstaviti kao linearno kombinovanje vrsta i kolona matrične jednačine, a na drugoj kroz formalizam levog, desnog i obostranog prekondicioniranja. Polazeći od ovog formalizma u nastavku je prvo tretiran problem ortogonalizacije funkcija bazisa, a zatim i problem ortogonalizacije vrsta i kolona matrične jednačine.

Mada su maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa bile poznate i pre ovoga rada, one nisu našle široku primenu, pre svega zbog komplikovanog načina njihovog zadavanje i još komplikovanije primene. U ovoj disertaciji je razvijen jedan nov, i pritom izuzetno jednostavan, postupak generisanja maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa, koji se bazira na dvostepenoj primeni Gram-Šmitove ortogonalizacije. Posebno jednostavan oblik je demonstriran u slučaju kada se polazi od near-ortho funkcija bazisa. Korišćenjem ovog postupka izvedeni su, tabelirani i nacrtani izrazi za max-ortho funkcije bazisa zaključno sa osmim redom izraženi preko stepenih funkcija i preko Ležandrovih polinoma. Posebno su tabelirani težinski koeficijenti ovih funkcija bazisa, koji zadovoljavaju različite zahteve u pogledu normalizacije. Dodatna pažnja je posvećena konverziji razvoja izraženih preko maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa u razvoje izražene preko modifikovanih funkcija bazisa, čime se između ostalog omogućava korišćenje već postojećih algoritama za post-procesiranje. Urađen je niz numeričkih primera kojima se jasno pokazuje da se korišćenjem maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa u kombinaciji sa dijagonalnim ili proširenim dijagonalnim skaliranjem dramatično smanjuje kondicioni broj MoM matrice i broj iteracija potreban za rešenje matrične jednačine. Posebno je pokazano da se ovakvom kombinacijom rešavaju problemi visokog kondicionog broja u slučaju: 1) površinskih integralnih jednačina mešovitog tipa, 2) visokog kontrasta

karakteristika materijala i 3) primene funkcija bazisa višeg reda u prisustvu elemenata dramatično različitih veličina.

Princip ortogonalizacije funkcija bazisa, kojim se efikasno ublažava problem visokog kondicionog broja kod klasičnih funkcija bazisa viših redova, se može primeniti i u slučaju kada je matrica sistema već formirana. Pritom funkcije bazisa koje se koriste mogu biti proizvoljnog tipa. U disertaciji je razvijen jedan potpuno nov postupak prekondicioniranja MoM matrice formirane Galerkinovim testiranjem. Ovaj novi postupak prekondicioniranja se zasniva na istovremenom povećanju ortogonalnosti jednačina metode momenata i smanjenju norme-2 vrsta/kolona. Kao i kod maksimalno ortogonalizovanih funkcija bazisa, u osnovi se radi o linearnom kombinovanju funkcija bazisa, ali sa dodatnim ograničenjima. Prvo, novi postupak je ograničen na simetrične matrice, kakve se dobijaju kombinacijom jednačina EFIE i PMCHWT. Kako bi se kod novog postupka prekondicioniranja omogućila upotreba kompleksnih koeficijenata pri linearnom kombinovanju funkcija bazisa unutrašnji proizvod je redefinisao. U sklopu predstavljenog novog postupka prekondicioniranja razmatrano je nekoliko varijanti izračunavanja težinskih koeficijenata linearnog kombinovanja. Efekti njihove upotrebe pri prekondicioniranju su demonstrirani na nizu numeričkih primera. Najefikasnijom, u smislu kompromisa između broja potrebnih računskih operacija i efekata na smanjenje kondicionog broja, se pokazala metoda zasnovana na ortogonalizaciji posmatrane vrste/kolone sa drugim vrstama/kolonama. Vrste/kolone kojima se vrši ortogonalizacija posmatrane vrste/kolone se biraju iz skupa vrsta/kolona koje u odnosu na posmatranu kolonu imaju najače međusobne elemente. Pri tome se prednost daje onoj kombinaciji vrsta/kolona koja najviše smanjuje normu-2 posmatrane vrste/kolone u odnosu na dijagonalni element jedinične amplitude. Takođe, pokazalo se da upotreba većeg broja vrsta/kolona koje se koriste za linearno kombinovanje sa posmatranom vrstom/kolonom ne dovodi do dramatičnih poboljšanja za kondicioni broj i broj iteracija, tako da je sa praktičnog stanovišta gledano najefektivnije za linearno kombinovanje koristiti samo jednu vrstu/kolonu.

Linearno kombinovanje vrsta i kolona, koje treba da posluži za prekondicioniranje matrice, se može vršiti na mnogo različitih načina, od kojih su samo neki ispitani u ovom radu. U nastavku ovog rada se planira ispitivanje nekih drugih načina, kao što je na primer metoda koja se bazira na proširenom dijagonalnom skaliranju umesto običnog dijagonalnog skaliranja. Poseban problem u primeni bilo koje od ovih metoda je određivanje početnog skupa vrsta/kolona među kojima treba izvršiti izbor vrsta/kolona za ortogonalizaciju posmatrane vrste/kolone. U nastavku ovog rada se planira ispitivanje drugih strategija za izbor početnog skupa vrsta/kolona, među kojima je i strategija koja uzima u obzir fizičku bliskost elemenata.

Literatura

- [1] **R. F. Harrington**, *Field Computation by Moment Methods*, New York, NY, USA: Macmillan, 1968, 1993.
- [2] **E. K. Miller, L. Medgyesi-Mitschang, E. H. Newman (eds.)**, *Computational Electromagnetics: Frequency-Domain Method of Moments*, New York, NY, USA: IEEE Press, 1992.
- [3] **B. D. Popovic, B. M. Kolundzija**, *Analysis of Metallic Antennas and Scatterers*, London, U.K.: IEE, 1994.
- [4] **B. M. Kolundzija, A. R. Djordjevic**, *Electromagnetic Modeling of Composite Metallic and Dielectric Structures*, Boston, MA, USA: Artech House, 2002.
- [5] **P. P. Silvester, R. I. Ferrari**, *Finite Elements for Electrical Engineers*, 3rd ed., New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [6] **J. M. Jin**, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2nd ed., New York, NY, USA: Wiley, 2002.
- [7] **Kane Yee**, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation 14 (3): 302–307, 1966.
- [8] **A. Taflove**, *Application of the finite-difference time-domain method to sinusoidal steady state electromagnetic penetration problems*, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility 22 (3): 191–202, 1980.
- [9] **Allen Taflove, Susan C. Hagness**, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed., Artech House Publishers, 2005.
- [10] **T. Weiland**, *Discretization method for solution of Maxwell's equations for 6-component fields*, AEU-International Journal of Electronics and Communications, vol. 31, 116–120, 1977.
- [11] **C. Christopoulos**, *The Transmission Line Modeling Method: TLM*, Piscataway, NY, IEEE Press, 1995.
- [12] **Y. Zhang, T. K. Sarkar, H. Moon, A. De, M. C. Taylor**, *Solution of large complex problems in computational electromagnetics using higher order basis in MOM with parallel solvers*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 2007, 9-15 June 2007, pp. 5620-5623, 2007.
- [13] **Yu Zhang, T. K. Sarkar, A. De, N. Yilmazer, S. Burintramart, M. Taylor**, *A cross-platform parallel MoM code with ScaLAPACK solver*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 2007, 9-15 June 2007, pp. 2797-2800, 2007.
- [14] **Yu Zhang, T. K. Sarkar, H. Moon, M. Taylor, D. G. Donoro, M. Salazar-Palma**, *Parallel MoM simulation of complex EM problems*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, APSURSI '09., 1-5 June 2009, 1-4, 2009.

- [15] **M. J. Inman, A. Z. Elsherbeni**, *Programming video cards for computational electromagnetics applications*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Dec. 2005, 47, 6, pp. 71-78, 2005.
- [16] **Shaoxin Peng, Zaiping Nie**, *Acceleration of the Method of Moments Calculations by Using Graphics Processing Units*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Jul-08 2008, 56, 7, pp. 2130-2133, 2008.
- [17] **D. P. Zoric, D. I. Olcan, B. M. Kolundzija**, *Solving electrically large electrodynamic problems using graphics processing units*, Proceedings of the 5th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP), 11-15 April 2011, pp. 2263-2267, 2011.
- [18] **D. P. Zoric, D. I. Olcan, B. M. Kolundzija**, *On increasing capabilities of GPU in-core solver applied to method of moments*, 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP), 26-30 March 2012, pp. 391-394, 2012.
- [19] **B. Kolundzija, D. Olcan, D. Zoric**, *Efficient method of moment simulation based on higher order bases and CPU/GPU parallelization*, 2012 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), 8-14 July 2012, 1, 2, 2012.
- [20] **B. M. Kolundzija, D. P. Zoric**, *Efficient evaluation of MoM matrix elements using CPU and/or GPU*, 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP), 26-30 March 2012, pp. 702-706, 2012.
- [21] **M. Yuan, T. K. Sarkar, B. Kolundzija**, *Solution of large complex problems in computational electromagnetics using higher-order basis in MoM with out-of-core solvers*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Apr-06 2006, 48, 2, pp. 55-62, 2006.
- [22] **Yu Zhang, J. Porter, M. Taylor, T. K. Sarkar**, *Solving challenging electromagnetic problems using MoM and a parallel out-of-core solver on high performance clusters*, IEEE AP-S Antennas and Propagation Society International Symposium, 5-11 July 2008, 1-4, 2008.
- [23] **D. P. Zoric, D. I. Olcan, B. M. Kolundzija**, *Solving electrically large EM problems by using out-of-core solver accelerated with multiple graphical processing units*, 2011 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI), 3-8 July 2011, 2011.
- [24] **D. P. Zoric, D. I. Olcan, B. M. Kolundzija**, *Block-sparse out-of-core solver accelerated using GPUs for solving MoM problems*, 2013 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), 7-13 July 2013, pp. 1886-1887, 2013.
- [25] **A. W. Glisson, D. R. Wilton**, *Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 28, no. 5, pp. 593-603, Sep. 1980.
- [26] **S. M. Rao, A. W. Glisson, D. R. Wilton**, *Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 30, no. 3, pp. 409-481, May 1982.

- [27] **H. Shaubert, D. R. Wilton, A. W. Glisson**, *A tetrahedral modeling method for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped biological bodies*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 32, no. 1, pp. 77–85, Jan. 1984.
- [28] **B. M. Kolundzija**, *On the locally continuous formulation of surface doublets*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 46, no. 12, pp. 1879–1883, Dec. 1998.
- [29] **H. Whitney**, *Geometric Integration Theory*, Dover Publications, Dec. 10, 2005.
- [30] **B. M. Kolundzija**, *General entire-domain Galerkin method for electromagnetic modeling of composite wide-to-plate structures*, in Proc. 20th EuMc, Budapest, Hungary, pp. 853–858, Pt. 1, 1990.
- [31] **B. M. Kolundzija, B. D. Popovic**, *Entire-domain Galerkin method for analysis of generalized wire antennas and scatterers*, Proc. Inst. Electr. Eng., vol. 139, no. 1, pp. 17–24, Feb. 1992, Pt. H., 1992.
- [32] **B. M. Kolundzija, B. D. Popovic**, *Entire-domain Galerkin method for analysis of metallic antennas and scatterers*, Proc. Inst. Electr. Eng., vol. 140, no. 1, pt. H, pp. 1-10, Feb. 1993.
- [33] **B. M. Kolundzija**, *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures*, IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol. 47, pp. 1021–1032, July 1999.
- [34] **B. M. Notaros, B. D. Popovic**, *General entire-domain method for analysis of dielectric scatterers*, Proc. Inst. Electr. Eng., vol. 143, no. 6, pp. 498–504, Dec. 1996, Pt. H., 1996.
- [35] **M. M. Ilic, B. M. Notaros**, *Higher order hierarchical curved hexahedral vector finite elements for electromagnetic modeling*, IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol. 51, no. 3, pp. 1026–1033, Mar. 2003.
- [36] **J. P. Webb, B. Forghani**, *Hierarchical scalar and vector tetrahedra*, IEEE Trans. Magn., vol. 29, no. 2, pp. 1495–1498, Mar. 1993.
- [37] **L. S. Andersen, J. L. Volakis**, *Hierarchical tangential vector finite elements for tetrahedra*, IEEE Microw. Guided Wave Lett., vol. 8, no. 3, pp. 127–129, Mar. 1998.
- [38] **L. S. Andersen, J. L. Volakis**, *Development and application of a novel class of hierarchical tangential vector finite elements for electromagnetics*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 47, no. 1, pp. 112–120, Jan. 1999.
- [39] **R. D. Graglia, D. R. Wilton, A. F. Peterson**, *Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 45, no. 3, pp. 329–342, Mar. 1997.
- [40] **R. D. Graglia, D. R. Wilton, A. F. Peterson, I.-L. Gheorma**, *Higher order interpolatory vector bases on prism elements*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 46, no. 3, pp. 442–450, Mar. 1998.
- [41] **R. D. Graglia, I.-L. Gheorma**, *Higher order interpolatory vector bases on pyramidal elements*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 47, no. 5, pp. 775–782, May 1999.
- [42] **E. Suter, J. R. Mosig**, *A subdomain multilevel approach for the efficient MoM analysis of large planar antennas*, Micr. Opt. Technol., vol. 26, no. 4, pp. 270-277, Aug. 2000.

- [43] **V. Prakash, R. Mittra**, *Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equations*, *Micr. Opt. Technol.*, vol. 36, pp. 95-100, Jan. 2003.
- [44] **L. Matekovits, G. Vecchi, G. Dassano, M. Orefice**, *Synthetic function analysis of large printed structures: the solution space sampling approach*, *Proc. in IEEE AP S International Symposium*, Boston, Massachusetts, July 2001, pp. 568-571, 2001.
- [45] **Y. Saad**, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing Company, Boston, MA., <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html>, 1996.
- [46] **R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. van der Vorst**, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, 1987.
- [47] **Nader Engheta, William D. Murphy, Vladimir Rokhlin, Marius Vassiliou**, *The Fast Multipole Method for Electromagnetic Scattering Computation*, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40, pp. 634-641, 1992.
- [48] **Owe Axelsson**, *Iterative Solution Methods*, Cambridge University Press, 1996.
- [49] **J. M. Song, W. C. Chew**, *Fast multipole method solution of three dimensional integral equation*, 1995. AP-S Digest Antennas and Propagation Society International Symposium, 18-23 June 1995, 3, pp. 1528-1531, vol.3, 1995.
- [50] **J. M. Song, C.-C. Lu, W. C. Chew**, *Multilevel fast multipole algorithm (MLDM) for complex objects*, 1996. AP-S. Digest Antennas and Propagation Society International Symposium, 21-26 July 1996, 3, pp. 1730-1733, vol.3, 1996.
- [51] **Zhao Kezhong, M. Vouvakis, Lee Jin-Fa**, *Application of the multilevel adaptive cross-approximation on ground plane designs*, 2004 EMC International Symposium on Electromagnetic Compatibility, 9-13 Aug. 2004, 1, 124, 2004.
- [52] **Zhao Kezhong, Marinos N. Vouvakis, J.-F. Lee**, *The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems*, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Nov. 2005, 47, 4, 763, 2005.
- [53] **J. Shaeffer**, *Direct Solve of Electrically Large Integral Equations for Problem Sizes to 1 M Unknowns*, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 56, Iss. 8, Pt. 1, pp. 2306-2313, 2008.
- [54] **K. C. Donepudi, K. Gang, J. M. Song, W. C. Chew**, *Higher-order MoM implementation to solve integral equations*, 1999. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Vol. 3, pp. 1716-1719, 1999.
- [55] **J. R. Mautz, R. F. Harrington**, *H-Field, E-Field and Combined-Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution*, *Arch. Elek. Ubertragung*, Vol. 32, No. 4, pp. 157-164, 1978.
- [56] **S. Y. Chen, W. C. Chew, J. M. Song, J. S. Zhao**, *Low frequency MOM for penetrable scatterers*, 2000. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 16-21 July 2000, 3, pp. 1838-1841, vol. 3, 2000.

- [57] **Yunhui Chu, Weng Cho Chew, Junsheng Zhao, Siyuan Chen**, *A surface integral equation formulation for low-frequency scattering from a composite object*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Oct. 2003, 51, 10, pp. 2837-2844, 2003.
- [58] **Zhi-Guo Qian, Weng Cho Chew**, *An augmented electric field integral equation for low frequency electromagnetic analysis*, 2008. AP-S IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 5-11 July 2008, 1, 4, 2008.
- [59] **Magnus R. Hestenes, Eduard Stiefel**, *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, Journal of Research of the National Bureau of Standards 49, December 1952.
- [60] **T. K. Sarkar, K. R. Siarkiewicz, R. F. Stratton**, *Survey of numerical methods for solution of large systems of linear equations for electromagnetic field problems*, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-29, no. 6, pp. 847-856, Nov. 1981.
- [61] **T. K. Sarkar, E. Arvas**, *On a class of finite step iterative methods (conjugate directions) for the solution of an operator equation arising in electromagnetics*, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-33, no. 10, pp. 1058-1066, Oct. 1985.
- [62] **A. F. Peterson, R. Mittra**, *Convergence of the conjugate gradient method when applied to matrix equations representing electromagnetic scattering problems*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol. AP-34, no. 12, pp. 1447-1454, Dec. 1986.
- [63] **Henk A. van der Vorst**, *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*, Cambridge University Press, 2003.
- [64] **Y. Saad, M. H. Schultz**, *GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 7, pp. 856-869, 1986.
- [65] **A. F. Peterson, C. F. Smith, R. Mittra**, *Eigenvalues of the moment-method matrix and their effect on the convergence of the conjugate gradient algorithm (EM scattering)*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Aug. 1988., 36, 8, pp. 1177-1179, 1988.
- [66] **G. Burger, H.-D. Bruns, H. Singer**, *Advanced method of moments based on iterative equation system solvers*, IEEE Int. Symp. on Electromagnetic Compatibility, pp. 236-241, Aug. 1997.
- [67] **J. von Hagen, W. Wiesbeck**, *Physics-based preconditioner for iterative algorithms in MoM-problems*, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 50, no. 9, pp. 1315-1316, Sep. 2002.
- [68] **J.-R. Poirier, P. Borderies, R. Mittra, V. Varadarajan**, *Numerically efficient solution of dense linear system of equations arising in a class of electromagnetic scattering problems*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol. 46, no. 8, pp. 1169-1175, Aug. 1998.
- [69] **M. Carr, M. Bleszynski, J. L. Volakis**, *A near-field preconditioner and its performance in conjunction with the BiCGstab(ell) solver*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 46, Iss. 2, pp. 23-30, 2004.

- [70] **K. Sertel, J. L. Volakis**, *Incomplete LU preconditioner for FMM implementation*, Microwave and Opt. Tech. Letters, vol. 26, no. 4, pp. 265–267, Aug. 2000.
- [71] **T. Malas, L. Gurel**, *Incomplete LU Preconditioning Strategies for MLFMA*, 2006 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 9–14 July 2006, pp. 3921–3924, 2006.
- [72] **K. C. Donepudi, Jin Jian-Ming, Weng Cho Chew**, *A higher order multilevel fast multipole algorithm for scattering from mixed conducting/dielectric bodies*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Oct. 2003, Vol. 51, Iss. 10, pp. 2814–2821, 2003.
- [73] **Leem Koung Heem, G. Pelekanos**, *Algebraic multigrid preconditioner for homogeneous scatterers in electromagnetics*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 54, Iss. 7, pp. 2081–2087, 2006.
- [74] **G. Alleon, M. Benzi, L. Giraud**, *Sparse approximate inverse preconditioning for dense linear systems arising in computational electromagnetics*, Numerical Algorithms, vol. 16, no. 1, pp. 1–15, 1997.
- [75] **Lee Jeonghwa, Zhang Changjiang, Lu Cai-Cheng**, *Sparse inverse preconditioning of multilevel fast multipole algorithm for hybrid Integral equations in electromagnetics*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Sept. 2004, Vol: 52, Issue: 9, pp. 2277–2287, 2004.
- [76] **Niu Zhenyi, Xu Jinping**, *Near-field sparse inverse preconditioning of multilevel fast multipole algorithm for electric field integral equations*, Microwave Conference Proceedings, 2005. APMC 2005. Asia-Pacific Conference Proceedings, Vol. 3, 2005.
- [77] **T. Malas, O. Ergul, L. Gurel**, *Effective Preconditioners for Large Integral-Equation Problems*, EuCAP 2007. The Second European Conference on Antennas and Propagation, 11–16 Nov. 2007, 1, 5, 2007.
- [78] **Rui Ping-Liang, Chen Ru-Shan, Wang Dao-Xiang, Yung, Edward Kai-Ning**, *A Spectral Multigrid Method Combined With MLFMM for Solving Electromagnetic Wave Scattering Problems*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 55, Iss. 9, pp. 2571–2577, 2007.
- [79] **F. P. Andriulli, K. Cools, H. Bagci, F. Olyslager, A. Buffa, S. Christiansen, E. Michielssen**, *A Multiplicative Calderon Preconditioner for the Electric Field Integral Equation*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Aug. 2008, Vol: 56, Issue: 8, pp. 2398–2412, 2008.
- [80] **H. Bagci, F. P. Andriulli, K. Cools, F. Olyslager, E. Michielssen**, *A Calderón Multiplicative Preconditioner for the Combined Field Integral Equation*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 57, Iss. 10, Pt. 2, pp. 3387–3392, 2009.
- [81] **K. Cools, F. P. Andriulli, E. Michielssen**, *A Calderón Multiplicative Preconditioner for the PMCHWT Integral Equation*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 59, Iss. 12, pp. 4579–4587, 2011.
- [82] **Su Yan, Jian-Ming Jin, Zaiping Nie**, *Calderón Preconditioner: From EFIE and MFIE to N-Müller Equations*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 58, Iss. 12, pp. 4105–4110, 2010.

- [83] **P. Yla-Oijala, S. P. Kiminki, S. Jarvenpaa**, *Calderon Preconditioned Surface Integral Equations for Composite Objects With Junctions*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 59, Iss. 2, pp. 546-554, 2011.
- [84] **B. Kolundzija, T. Sarkar**, *Iterative solvers in frequency analysis of complex structures based on MoM solution of surface integral equations*, Proceedings of the 2001 IEEE Antennas and Propagation Soc. Int. Symp., vol. 2, pp. 588–591, Boston, MA, July 2001.
- [85] **J. P. Webb**, *Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 47, no. 8, pp. 1244–1253, Aug. 1999.
- [86] **M. Djordjevic, B. M. Notaros**, *Three types of higher-order MoM basis functions automatically satisfying current continuity conditions*, Dig. in IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp., Jun 2002, vol. 4, pp. 610–613, 2002.
- [87] **E. Jørgensen**, *Higher order integral equation methods in computational electromagnetics*, Ph.D. dissertation, Tech. Univ. of Denmark, Ørsted-DTU, Lyngby, Denmark, 2003.
- [88] **E. Jørgensen, J. L. Volakis, P. Meincke, O. Breinbjerg**, *Higher order hierarchical legendre basis functions for electromagnetic modeling*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 52, no. 11, pp. 2985–2995, Nov. 2004.
- [89] **D. S. Sumic, B. M. Kolundzija**, *Efficient iterative solution of surface integral equations based on maximally orthogonalized higher order basis functions*, IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp., Jul. 2005, vol. 4A, pp. 288-291, 2005.
- [90] **R. Graglia, A. Peterson, F. Andriulli**, *Curl-conforming hierarchical vector bases for triangles and tetrahedra*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 59, no. 3, pp. 950-959, Mar. 2011.
- [91] **R. D. Graglia, A. F. Peterson**, *Hierarchical curl-conforming Nédélec elements for quadrilateral and brick cells*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 59, no. 8, pp. 2766-2773, Aug. 2011.
- [92] **A. F. Peterson, R. D. Graglia**, *Scale factors and matrix conditioning associated with triangular-cell hierarchical vector basis functions*, IEEE Antennas Wireless Propag. Lett., vol. 9, pp. 40–43, 2010.
- [93] **P. Yla-Oijala, M. Taskinen**, *Improving conditioning of electromagnetic surface integral equations using normalized field quantities*, IEEE Trans. Antennas Propag., Vol. 55, No. 1, pp. 1178-1185, Jan. 2007.
- [94] **Zlatko Drmač**, *Numerička matematika*, Studeni 2010.
- [95] **D. Young**, *Iterative solution of large linear systems*, Academic Press, 1971.
- [96] **R. Varga**, *Matrix iterative analysis*, Springer Verlag, 2000.
- [97] **Martin H. Gutknecht**, *Iterative Methods, Part II of "Software for Numerical Linear Algebra"*, ETH Zurich, 2008.
- [98] **Victor S. Ryaben'kii, Semyon V. Tsynkov**, *A Theoretical Introduction to Numerical Analysis*, CRC Press, 2006.
- [99] **Desanka P. Radunović**, *Numeričke metode*, AKADEMSKA MISAO, Beograd, 2003.

- [100] **T. K. Sarkar, X. Yang, E. Arvas**, *A limited survey of various conjugate gradient methods for solving complex matrix equations arising in electromagnetic wave interactions*, *Wave Motion*, vol. 10, pp. 527–546, 1988.
- [101] **G. Meurant**, *Computer solution of large linear systems*, North-Holland, 1999.
- [102] **R. Mittra, V. V. S. Prakash, Jae Kwon Soon**, *An improved iterative solution for method of moments problems in electromagnetics*, 2002. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Vol: 4, Iss. 4, pp. 622-625, 2002.
- [103] **Z. H. Fan, R. S. Chen, E. K.-N. Yung, D. X. Wang**, *Inner-outer GMRES algorithm for MLFMA implementation*, 2005 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 3-8 July 2005, Vol. 4A, pp. 463-466, 2005.
- [104] **Gou Ming-Jiang, Wu Yue-Qian, Huang Cheng-Dan, Sheng Xin-Qing**, *Fast computation of RCS from electrically large 3-D homogeneous objects*, 2012 10th International Symposium on Antennas, Propagation & EM Theory (ISAPE), 22-26 Oct. 2012, pp. 878-881, 2012.
- [105] **Tahir Malas**, *Effective preconditioners for iterative solutions of large-scale surface-integral-equation problems*, Ph.D. dissertation, March 2010.
- [106] **L. Y. Kolotilina, A. Y. Yeremin**, *Factorized sparse approximate inverse preconditioning I. Theory*, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 14, no. 9, pp. 45–58, 1993.
- [107] **M. Benzi, M. Tuma**, *A sparse approximate inverse preconditioner for nonsymmetric linear systems*, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 19, no. 3, pp. 968–994, 1998.
- [108] **B. Carpentieri, I. S. Duff, L. Giraud**, *Experiments with sparse preconditioning of dense problems from electromagnetic applications*, Technical Report TR/PA/00/04, CERFACS, Toulouse, France, 1999.
- [109] **M. Benzi, M. Tuma**, *A comparative study of sparse approximate inverse preconditioners*, *Appl. Numer. Math.*, vol. 30, no. 2–3, pp. 305–340, 1999.
- [110] **X. Q. Sheng, J.-M. Jin, J. Song, W. C. Chew, C.-C. Lu**, *Solution of combined-field integral equation using multilevel fast multipole algorithm for scattering by homogeneous bodies*, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 46, no. 11, pp. 1718-1726, Nov. 1998.
- [111] **X. Q. Sheng, J.-M. Jin, J. Song, C.-C. Lu, W. C. Chew**, *On the formulation of hybrid finite-element and boundary-integral methods for 3-D scattering*, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 46, no. 3, pp. 303-311, Mar. 1998.
- [112] **A. Zhu, S. Gedney, J. L. Visher**, *A study of combined field formulations for material scattering for a locally corrected Nystrom discretization*, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, no. 12, pp. 4111-4120, Dec. 2005.
- [113] **M. Taskinen, P. Yla-Oijala**, *Current and Charge Integral Equation Formulation*, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 54, No. 1, pp. 58 67, Jan. 2006.

- [114] **B. M. Kolundzija, D. S. Sumic**, *Optimal weights of basis functions for efficient iterative solution of surface integral equations*, 2005 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Vol. 4A ,pp. 284-287, July 2005.
- [115] **D. Ruiz**, *A Scaling Algorithm to Equilibrate Both Rows and Columns Norms in Matrices*, Tech. Report RAL-TR-2001-034, Rutherford Appleton Laboratory, Sep. 2001.
- [116] **E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. W. Demmel, J. J. Dongarra, J. D. Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen**, *LAPACK Users' Guide*, SIAM, Philadelphia, 1999.
- [117] **M. Kostic, B. Kolundzija**, *Optimal Scaling Strategy of Maximally Orthogonalized Basis Functions for Efficient Solution of Surface Integral Equations*, The 28th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, Columbus, Ohio, April 10-14, 2012.
- [118] **WIPL-D Pro v10.0**, <http://www.wipl-d.com>
- [119] **Gradimir V. Milovanović, Radosav Ž. Đorđević**, *Linearna algebra*, Elektronski fakultet, 2004.
- [120] **Richard S. Varga**, *Geršgorin and his circles*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [121] **R. A. Horn, C. R. Johnson**, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990.
- [122] **D. S. Mitrinović**, *Uvod u specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1975.

Prilozi

Prilog A. Norme vektora i matrica

Norme vektora i matrica se intenzivno koriste u ovom radu i osnovne definicije i neke od njihovih osobina su date u ovom prilogu (na osnovu [121]).

Za vektor \mathbf{x} dimenzije n definiše se njegova norma, u oznaci $|\mathbf{x}|$, kao nenegativan realan broj za koji važi:

$$|\mathbf{x}| > 0, \text{ za } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ i } |\mathbf{x}| = 0, \text{ akko } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.1a})$$

$$|k\mathbf{x}| = |k| |\mathbf{x}|, \text{ za bilo koji skalar } k, \quad (\text{A.1b})$$

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|. \quad (\text{A.1c})$$

Norma vektora $|\mathbf{x}|_p$, za $p = 1, 2, \dots$ se definiše preko:

$$|\mathbf{x}|_p \equiv \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}. \quad (\text{A.2})$$

Kao poseban slučaj se definiše i beskonačna norma, $|\mathbf{x}|_\infty$ koristeći:

$$|\mathbf{x}|_\infty \equiv \max_i |x_i|. \quad (\text{A.3})$$

Za kvadratnu kompleksnu matricu \mathbf{A} reda n definiše se njena norma, u oznaci $\|\mathbf{A}\|$, kao nenegativan realan broj za koji važi:

$$\|\mathbf{A}\| > 0, \text{ za } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}, \text{ i } \|\mathbf{A}\| = 0, \text{ akko } \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\|k\mathbf{A}\| = |k| \|\mathbf{A}\|, \text{ za bilo koji skalar } k, \quad (\text{A.4b})$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \quad (\text{A.4c})$$

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|. \quad (\text{A.4d})$$

Ukoliko su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice \mathbf{A} , tada je:

$$\frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} \leq \lambda_i \leq \|\mathbf{A}\|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.5})$$

Matrična p -norma se definiše za realan broj p , $1 \leq p \leq \infty$ i matricu \mathbf{A} preko:

$$\|\mathbf{A}\|_p \equiv \max_{\mathbf{x}, |\mathbf{x}|_p=1} |\mathbf{A}\mathbf{x}|_p, \quad (\text{A.6})$$

gde je $|\mathbf{x}|_p$ odgovarajuća vektorska norma. Frobenijusova norma matrice je jednaka normi-2 vektora koji sadrži sve elemente matrice.

Dalje je:

$$\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (\text{A.7a})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 \equiv \left(\max \{ \lambda(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.7b})$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty \equiv \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (\text{A.7c})$$

Pod normom matrice se najčešće podrazumeva $\|\mathbf{A}\|_2$. Norme $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_2$ i $\|\mathbf{A}\|_\infty$ zadovoljavaju nejednakost:

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{A}\|_\infty. \quad (\text{A.8})$$

Prilog B. Ležandrovi polinomi

Ležandrovi polinomi imaju nekoliko veoma zanimljivih osobina i neke od njih su ovde predstavljene (na osnovu [122]).

Ležandrovi polinomi predstavljaju rešenja Ležandrove diferencijalne jednačine:

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) = 0, \quad (\text{B.1})$$

za $n = 0, 1, 2, \dots$.

Kompaktno se mogu predstaviti preko Rodrigešove formule kao:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (\text{B.2})$$

Takođe su zastupljene formule za Ležandrove polinome n -tog reda date sa:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (\text{B.3})$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{2n-2k}{n} \binom{n}{k} x^{n-2k}. \quad (\text{B.4})$$

Prvih nekoliko Ležandrovih polinoma su:

$$L_0(x) = 1, \quad (\text{B.5a})$$

$$L_1(x) = x, \quad (\text{B.5b})$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad (\text{B.5c})$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad (\text{B.5d})$$

$$L_4(x) = \frac{1}{2^3}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad (\text{B.5e})$$

$$L_5(x) = \frac{1}{2^3}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \quad (\text{B.5f})$$

$$L_6(x) = \frac{1}{2^4}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \quad (\text{B.5g})$$

$$L_7(x) = \frac{1}{2^4}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x), \quad (\text{B.5h})$$

$$L_8(x) = \frac{1}{2^7}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35). \quad (\text{B.5i})$$

Za Ležandrove polinome važi nekoliko rekurentnih relacija, od kojih su (za potrebe proračuna funkcija bazisa) najvažnije:

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x) = (2n+1)L_n(x), \quad (\text{B.7})$$

gde je relacija (B.6) poznata kao Boneova, a (B.7) kao Kristofelova.

Osobina ortogonalnosti na intervalu $[-1, 1]$ se može iskazati preko:

$$\int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.8})$$

gde je δ_{mn} Kronekerova delta funkcija definisana kao:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}. \quad (\text{B.9})$$

Od interesa su osobine na intervalu $[-1, 1]$:

$$L_n(1) = 1, \quad (\text{B.10})$$

$$L_n(-1) = (-1)^n, \quad (\text{B.11})$$

$$|L_n(x)| \leq 1. \quad (\text{B.12})$$

kao i (na osnovu B.8):

$$\int_{-1}^1 L_n(x)dx = 2\delta_{n0}, \quad (\text{B.13})$$

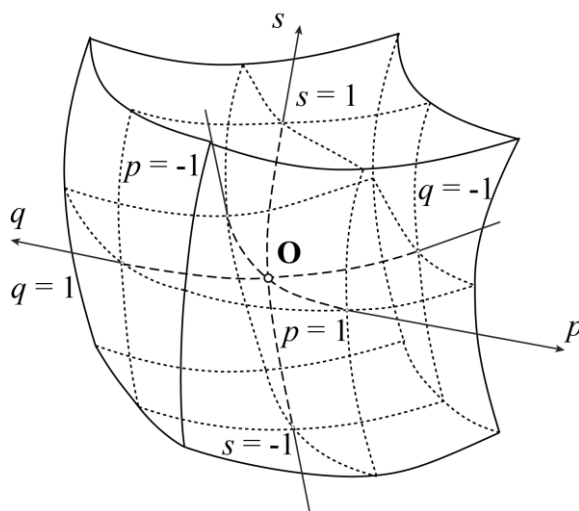
$$\int_{-1}^1 xL_n(x)dx = \frac{2}{3}\delta_{n1}. \quad (\text{B.14})$$

Prilog C. Maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa u slučaju heksaedarnih elemenata

Analogno generalizovanih žicama (Slika 2.6a) i generalizovanim četvorouglovima (Slika 2.6b) geometrija generalizovanog heksaedra (Slika C.1) je u potpunosti određena parametarskom jednačinom:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, p, s), \quad -1 \leq q, p, s \leq 1, \quad (\text{C.1})$$

kojom se kocka u lokalnom qps -koordinatnom sistemu preslikava u (u opštem slučaju zakrivljeni) heksaedar u globalnom xyz -koordinatnom sistemu.



Slika C.1 Generalizovani heksaedar.

Za kovariantne unitarne vektore \mathbf{a}_q , \mathbf{a}_p i \mathbf{a}_s definisane kao:

$$\mathbf{a}_q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}, \quad \mathbf{a}_p = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}, \quad \mathbf{a}_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \quad (\text{C.2a,b,c})$$

elemenat zapremine dv se može izraziti preko:

$$dv = J_3 dq dp ds, \quad (\text{C.3})$$

gde je J_3 zapreminski Jakobijan dat sa:

$$J_3 = (\mathbf{a}_q \times \mathbf{a}_p) \cdot \mathbf{a}_s. \quad (\text{C.4})$$

Tada se, prema [4], celo-domenska aproksimacija s -komponente zapreminske gustine struje generalizovanog heksaedra usvaja u formi:

$$\mathbf{D}_s(q, p, s) = \frac{\mathbf{a}_s}{J_3} \sum_{i=0}^{n_q-1} \sum_{j=0}^{n_p-1} \sum_{k=0}^{n_s} a_{ijk} P_i(q) P_j(p) S_k(s), \quad (\text{C.5})$$

za slučaj funkcija bazisa višeg reda kod kojih se održava kontinuitet normalne komponente (tzv. *div-conforming* funkcije bazisa).

Polazeći od definicionih izraza za kontravarijantne unitarne vektore, $\mathbf{a}^q = \nabla q$, $\mathbf{a}^p = \nabla p$, $\mathbf{a}^s = \nabla s$, isti se mogu izraziti preko kovarijantnih unitarnih vektora i zapreminskog *Jacobian*-a kao:

$$\mathbf{a}^q = \frac{\mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_s}{J_3}, \quad \mathbf{a}^p = \frac{\mathbf{a}_s \times \mathbf{a}_q}{J_3}, \quad \mathbf{a}^s = \frac{\mathbf{a}_q \times \mathbf{a}_p}{J_3}. \quad (\text{C.6a,b,c})$$

Na osnovu toga se, prema [4], celo-domenska aproksimacija s -komponente zapreminske gustine struje generalizovanog heksaedra usvaja u formi:

$$\mathbf{E}_s(q, p, s) = \mathbf{a}^s \sum_{i=0}^{n_q} \sum_{j=0}^{n_p} \sum_{k=0}^{n_s-1} a_{ijk} S_i(q) S_j(p) P_k(s), \quad (\text{C.7})$$

za slučaj funkcija bazisa višeg reda kod kojih se održava kontinuitet tangencijalne komponente (tzv. *curl-conforming* funkcije bazisa).

Maksimalno ortogonalizovane funkcije bazisa u slučaju heksaedarnih geometrijskih elemenata su oblika (C.5), odnosno (C.7), gde su P funkcije odgovarajući Ležandrovi polinomi (ortogonalni polinomi), a S funkcije su odgovarajući Q -polinomi (maksimalno ortogonalizovani polinomi, dati u Glavi 7).

Biografija autora

Milan Kostić rođen je 01.06.1979. godine u Pirotu. Osnovnu školu i prirodno-matematički smer gimnazije završio je u Pirotu. Nosilac je diplome “Vuk Stefanović Karadžić”. Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu upisao je 1998. godine. Diplomski rad na temu “*Prilog analizi signala impulsno-Doplerovog meteorološkog radara*” odbranio je septembra 2004. godine i time stekao zvanje diplomiranog inženjera elektrotehnike. Magistarski rad na temu “*Dijakoptička analiza antenskih sistema*” odbranio je novembra 2007. godine na istom fakultetu i time stekao zvanje magistra elektrotehničkih nauka - oblast primenjena elektromagnetika i optoelektronika. Od februara 2007. godine radi u firmi WIPL-D d.o.o. kao stručni saradnik za istraživanje i razvoj.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-~~а~~ Милан Костић
број уписа _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Ефикасно електромагнетско моделовање засновано на ортогонализацији функција базиса и једначина методе момената

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/~~на~~ ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 24.10.2014. год.

Милан Костић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милан Костић

Број уписа _____

Студијски програм _____

Наслов рада **Ефикасно електромагнетско моделовање засновано на ортогонализацији функција базиса и једначина методе момената**

Ментор проф. др Бранко Колунџија

Потписани Милан Костић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/~~ла~~ за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 24.10.2014. год.

Милан Костић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Ефикасно електромагнетско моделовање засновано на ортогонализацији функција базиса и једначина методе момената

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/~~на~~ сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/~~на~~.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство - без прераде
6. Ауторство - делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 24.10.2014. год.